ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 16. Выпуск 4.

УДК 512.579

О КОАТОМАХ И ДОПОЛНЕНИЯХ В РЕШЕТКАХ КОНГРУЭНЦИЙ УНАРОВ С МАЛЬЦЕВСКОЙ ОПЕРАЦИЕЙ

А. Н. Лата (г. Волгоград)

Аннотация

Одной из важных задач универсальной алгебры является изучение решеток, естественным образом связанных с алгебрами. В работе рассматриваются алгебры $\langle A, p, f\rangle$, сигнатура которых состоит из тернарной мальцевской операции p и унарной операции f, являющейся эндоморфизмом относительно первой операции. Изучаются свойства решеток конгруэнций алгебр $\langle A, p, f\rangle$ с мальцевской операцией p, определенной В.К. Карташовым. Эта алгебра определятся следующим образом. Пусть $\langle A, f\rangle$ — произвольный унар и $x, y \in A$. Для любого элемента x унара $\langle A, f\rangle$ через $f^n(x)$ обозначается результат n-кратного применения операции f к элементу x; при этом $f^0(x) = x$. Положим $M_{x,y} = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid f^n(x) = f^n(y)\}$, и $k(x, y) = \min\ M_{x,y}$, если $M_{x,y} \neq \emptyset$ и $k(x, y) = \infty$, если $M_{x,y} = \emptyset$. Положим далее

$$p(x, y, z) \stackrel{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) \leqslant k(y, z) \\ x, & \text{если } k(x, y) > k(y, z). \end{cases}$$

В работе описано строение коатомов в решетках конгруэнций алгебр $\langle A, p, f\rangle$ этого класса. Доказано, что решетка конгруэнций алгебры $\langle A, p, f\rangle$ не имеет коатомов тогда и только тогда, когда унар $\langle A, f\rangle$ связен, содержит одноэлементный подунар и имеет бесконечную глубину. Установлено, что в других случаях решетка конгруэнций алгебры $\langle A, p, f\rangle$ имеет единственный коатом.

Показано, что для любых неединичных конгруэнций θ и φ алгебры $\langle A, p, f\rangle$ выполняется неравенство $\theta \vee \varphi < \bigtriangledown$, где $\bigtriangledown$ — наибольшая конгруэнция алгебры.

Получены необходимые и достаточные условия, при которых решетка конгруэнций алгебр данного класса является решеткой с дополнениями, с единственными дополнениями, с относительными дополнениями, булевыми, обобщенными булевыми либо геометрическими. Установлено, что любая нетривиальная конгруэнция алгебры $\langle A, p, f\rangle$ из рассматриваемого класса не имеет дополнения. Доказано, что решетка конгруэнций любой алгебры $\langle A, p, f\rangle$ данного класса является решеткой с копсевдодополнениями.

Ключевые слова: решетка конгруэнций, решетка с дополнениями, решетка с копсевдодополнениями, коатом, алгебра с операторами, унар с мальцевской операцией.

Библиография: 24 названий.

ON COATOMS AND COMPLEMENTS IN CONGRUENCE LATTICES OF UNARS WITH MAL'TSEV OPERATION

A. N. Lata (Volgograd)

Abstract

One important problem is studying of lattices that naturally associated with universal algebra. In this article is considered algebras $\langle A, p, f\rangle$ with one Mal'tsev operation p and one unary operation f acting as endomorphism with respect to operation p. We study properties of congruence lattices of algebras $\langle A, p, f\rangle$ with Mal'tsev operation p that introduced by V. K. Kartashov. This algebra is defined as follows. Let $\langle A, f\rangle$ be an arbitrary unar and $x, y \in A$. For any element x of the unar $\langle A, f\rangle$ by $f^n(x)$ we denote the result of f applied n times to an element x. Also $f^0(x) = x$. Assume that

$$M_{x,y} = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid f^n(x) = f^n(y)\}$$

and also $k(x, y) = \min M_{x,y}$, if $M_{x,y} \neq \emptyset$ and $k(x, y) = \infty$, if $M_{x,y} = \emptyset$. Assume further

$$p(x, y, z) \stackrel{def}{=} \begin{cases} z, & \text{if } k(x, y) \leqslant k(y, z) \\ x, & \text{if } k(x, y) > k(y, z). \end{cases}$$

It is described a structure of coatoms in congruence lattices of algebras $\langle A, p, f\rangle$ from this class. It is proved congruence lattices of algebras $\langle A, p, f\rangle$ has no coatoms if and only if the unar $\langle A, f\rangle$ is connected, contains one-element subunar and has infinite depth. In other cases congruence lattices of algebras $\langle A, p, f\rangle$ has uniquely coatom.

It is showed for any congruences $\theta \neq A \times A$ and $\varphi \neq A \times A$ of algebra $\langle A, p, f\rangle$ fulfills $\theta \vee \varphi < A \times A$.

Necessary and sufficient conditions when a congruence lattice of algebras from given class is complemented, uniquely complemented, relatively complemented, Boolean, generalized Boolean, geometric are obtained. It is showed any non-trivial congruence of algebra $\langle A, p, f\rangle$ from this class has no complement. It is proved that congruence lattices of any algebra $\langle A, p, f\rangle$ from given class is dual pseudocomplemented lattice.

Keywords: congruence lattice, complemented lattice, dual pseudocomplemented lattice, coatom (dual atom), algebra with operators, unar with Mal'tsev operation.

Bibliography: 24 titles.

1. Введение

Унаром с мальцевской операцией [1] называется алгебра $\langle A, d, f\rangle$ с унарной операцией f и тернарной операцией d, на которой истинны тождества Мальцева $d(x,y,y) = d(y,y,x) = x$ и тождество перестановочности $f(d(x,y,z)) = d(f(x), f(y), f(z))$.

Унары с мальцевской операцией образуют подкласс в классе алгебр с операторами. *Алгеброй с операторами* (см., например, [2]) называется универсальная алгебра с дополнительной системой операторов — унарных операций, действующих как эндоморфизмы относительно основных операций (перестановочных с основными операциями).

Значительное внимание исследователей уделяется булевым алгебрам с операторами [3], полугруппам, полурешеткам и решеткам с операторами [4], [5]. Решетки конгруэнций полурешеток с операторами тесно связаны с решетками подклассов различных классов алгебр [6], [7].

Алгебры с операторами естественным образом связаны с другим важным классом универсальных алгебр — *унарами*, то есть, алгебрами с одной унарной операцией. Если f — унарная операция из сигнатуры Ω, то унар $\langle A, f\rangle$ называется *унарным редуктом* алгебры $\langle A, \Omega\rangle$.

В [8] Дж. Берман описал атомы в решетках конгруэнций унаров, а также унары с полумодулярной сверху, либо геометрической (в смысле Биркгофа) решеткой конгруэнций. В [9] Д. П. Егорова и Л. А. Скорняков охарактеризовали унары, решетка конгруэнций которых является булевой, либо решеткой с дополнениями. В [10] и [11] А. П. Бощенко описал унары, решетка конгруэнций которых является решеткой с псевдодополнениями и с копсевдодополнениями соответственно.

В [1] показано, что на любом унаре $\langle A, f\rangle$ можно задать тернарную операцию p так, что алгебра $\langle A, p, f\rangle$ становится унаром с мальцевской операцией, а унарная операция — ее эндоморфизмом. Эта алгебра определятся следующим образом.

Пусть $\langle A, f\rangle$ — произвольный унар и $x, y \in A$. Для любого элемента x унара $\langle A, f\rangle$ через $f^n(x)$ обозначается результат n-кратного применения операции f к элементу x; при этом $f^0(x) = x$. Положим $M_{x,y} = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid f^n(x) = f^n(y)\}$, и $k(x,y) = \min\ M_{x,y}$, если $M_{x,y} \neq \emptyset$ и $k(x,y) = \infty$, если $M_{x,y} = \emptyset$. Положим далее

$$p(x,y,z) \stackrel{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x,y) \leqslant k(y,z) \\ x, & \text{если } k(x,y) > k(y,z). \end{cases} \tag{1}$$

Многообразие называется *арифметическим*, если оно конгруэнц-перестановочно и конгруэнц-дистрибутивно. Арифметичность многообразия эквивалентна существованию терма Пиксли от основных операций, то есть, тернарного терма d, для которого выполнены тождества Пиксли $d(x,x,y) = d(y,x,x) = d(y,x,y) = y$ [12].

Из (1) следует, что класс K унаров с мальцевской операцией $p(x, y, z)$ содержится в многообразии, заданном тождествами Пиксли. Отсюда, K является конгруэнц-перестановочным и конгруэнц-дистрибутивным.

В ряде работ были изучены многие виды алгебр из этого класса, определяемые конгруэнц–свойствами. В [13] были описаны простые и псевдопростые алгебры из K. В [14] — подпрямо неразложимые, а также такие, решетка конгруэнций которых является цепью. В [15] было получено описание строения атомов в таких решетках, там же были описаны алгебры из данного класса, имеющие точечную решетку конгруэнций. В [16] были описаны строго простые алгебры из K и близких к нему классов. В работах [17] – [19] автором были описаны алгебры, у которых все конгруэнции являются однородными, регулярными, либо слабо регулярными.

2. Основные определения и конструкции

Неодноэлементная алгебра называется *простой*, если она имеет в точности две конгруэнции (наибольшую $\bigtriangledown$ и наименьшую $\bigtriangleup$). Через $ConA$ обозначается решетка конгруэнций алгебры A. Класс конгруэнции θ, порожденный элементом a, обозначается через $[a]\theta$.

Решетка $\langle L, \vee, \wedge\rangle$ с нулем 0 и единицей 1 называется *решеткой с дополнениями*, если для любого элемента $x \in L$ существует такой элемент $x' \in L$, что выполняются равенства $x \wedge x' = 0$ и $x \vee x' = 1$. Элемент x' называется дополнением элемента x.

Если каждый элемент решетки обладает в точности одним дополнением, то она называется *решеткой с единственными дополнениями*. Такие решетки систематически рассматривались в [20].

Пусть $b, c \in L$, $b \leqslant c$ и $a \in [b, c]$. Элемент x называется *относительным дополнением* элемента a в интервале $[b, c]$, если $a \wedge x = b$ и $a \vee x = c$. *Решеткой с относительными дополнениями* называется решетка, в которой каждый элемент имеет относительное дополнение в любом содержащем его интервале.

Булевой решеткой называется дистрибутивная решетка с дополнениями. Дистрибутивная решетка с нулем и относительными дополнениями называется *обобщенной булевой решеткой*.

Пусть $\langle L, \vee, \wedge\rangle$ — решетка с нулем 0. Элемент $l^* \in L$ называется *псевдодополнением* элемента $l \in L$, если $l \wedge l^* = 0$ и для любого элемента $x \in L$ равенство $l \wedge x = 0$ влечет $x \leqslant l^*$.

Решетка L с нулем называется *решеткой с псевдодополнениями*, если каждый ее элемент имеет псевдодополнение.

Пусть $\langle L, \vee, \wedge\rangle$ — решетка с единицей 1. Элемент $l^+ \in L$ называется *копсевдодополнением* элемента $l \in L$, если $l \vee l^+ = 1$, и для любого элемента $x \in L$ из равенства $l \vee x = 1$ следует $l^+ \leqslant x$.

Решетка L с единицей называется *решеткой с копсевдодополнениями*, если

каждый ее элемент имеет копсевдодополнение.

Элемент $p \neq 0$ решетки L с нулем 0 называется *атомом*, если для любого $x \in L$ неравенство $0 \leqslant x \leqslant p$ влечет $x = 0$ или $x = p$. Двойственным образом определяется *коатом* решетки.

Решетка L называется *геометрической* (см. [21]), если L — полумодулярная алгебраическая решетка, в которой компактными элементами являются конечные объединения атомов и только они.

Другие определения и утверждения теории решеток можно найти в [21], [22].

Пусть $\langle A, f\rangle$ — произвольный унар. Далее для любых целых чисел $h > 0$, $t \geqslant 0$ через $C_h^t = \langle a | f^t(a) = f^{h+t}(a)\rangle$ обозначается унар с образующим a и определяющим соотношением $f^t(a) = f^{h+t}(a)$. Унар C_n^0 называется *циклом длины* n. Элемент a унара называется *циклическим*, если подунар, порожденный этим элементом, является циклом.

Элемент a унара называется *периодическим*, если $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ для некоторых $t \geqslant 0$ и $n \geqslant 1$. Через $T(A)$ обозначается множество периодических элементов унара A. Если a — периодический элемент, то наименьшее из чисел t, для которых $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ при некоторых $n \geqslant 1$, называется *глубиной элемента* a и обозначается через $t(a)$. *Глубиной* $t(A)$ *унара* A называется наибольшая из глубин его периодических элементов, если $T(A) \neq \emptyset$. Если множество $\{t(a) \mid a \in T(A)\}$ не ограничено, глубина унара считается бесконечной.

Объединение двух непересекающихся унаров B и C называется их *суммой* и обозначается через $B + C$. Унар $\langle A, f\rangle$ называется *связным*, если для любых $x, y \in A$ выполняется условие $f^n(x) = f^m(y)$ для некоторых $n, m \geqslant 0$. Максимальный по включению связный подунар унара A называется *компонентой связности* унара A.

Далее через σ_n, где $n \in N$, обозначается $\mathrm{Ker} f^n$; при этом полагаем $\sigma_0 = \triangle$. В [13] на произвольном унаре $\langle A, f\rangle$ определяется бинарное отношение σ: $x\sigma y \Leftrightarrow \exists n > 0\ (f^n(x) = f^n(y))$, и показано, что это отношение является конгруэнцией любой алгебры $\langle A, \Omega\rangle$ с оператором $f \in \Omega$.

В [13] на связном унаре, имеющем одноэлементный подунар, определено бинарное отношение β_n по правилу: $x\beta_n y$ тогда и только тогда, когда $x = y$ или $t(x), t(y) \leqslant n$. По лемме 15 [13], при любом $n \geqslant 0$ отношение β_n является конгруэнцией унара с мальцевской операцией $p(x, y, z)$, определенной по правилу (1).

3. Характеризация решеток конгруэнций унаров с мальцевской операцией

Далее везде через $\langle A, p, f\rangle$ будем обозначать унар с мальцевской операцией $p(x, y, z)$, определенной по правилу (1).

Лемма 1. *Пусть $\langle L, \vee, \wedge\rangle$ — решетка с нулем 0 и единицей 1, в которой существует такой элемент $a \in L$, что $0 < a < 1$ и для каждого $x \in L$ выполняется либо $x \leqslant a$, либо $a \leqslant x$, тогда следующие условия равносильны:*

1. $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ *не является решеткой с дополнениями;*

2. $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ *не является решеткой с единственными дополнениями;*

3. $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ *не является решеткой с относительными дополнениями.*

Доказательство. Пусть $a \in L$ и $0 < a < 1$. Очевидно, что (1) $\Rightarrow$ (2), (1) $\Rightarrow$ (3), (3) $\Rightarrow$ (1), (3) $\Rightarrow$ (2). Чтобы обосновать, что (2) $\Rightarrow$ (1), (2) $\Rightarrow$ (3), достаточно показать, что хотя бы один элемент не имеет дополнений в L.

Предположим, что существует a' – дополнение элемента a в L. Поскольку $a' \in L$, то по условию, либо $a' \leqslant a$, либо $a \leqslant a'$.

В случае, если $a' \leqslant a$, то $a' \wedge a = a'$ и, следовательно, $a' = 0$. Но $a' \vee a = 1$. Тогда $0 \vee a = 1$, откуда $a = 1$, что противоречит условию. Аналогично, из $a \leqslant a'$ следует $a' = 1$. Отсюда $a = 0$, что снова противоречит условию. □

Лемма 2. *Пусть алгебра* $\langle A, p, f \rangle$ *не является конгруэнц-простой. Тогда любая ее неединичная конгруэнция содержится в конгруэнции* σ_n *для некоторого* $n > 0$*, а следовательно, и в конгруэнции* σ.

Доказательство. Пусть $\theta \in Con\langle A, p, f \rangle$, $\theta \neq \bigtriangledown$ и $a, b \in A$. По лемме 5 [14], из $a\theta b$ следует, что $k(a, b) = n < \infty$ для некоторого $n \geqslant 0$. Тогда $a\sigma_n b$, откуда $a\sigma b$. Таким образом, $\theta \subseteq \sigma_n \subseteq \sigma$. □

Лемма 3. *Пусть унарный редукт* $\langle A, f \rangle$ *алгебры* $\langle A, p, f \rangle$ *не является связным унаром с одноэлементным подунаром. Тогда конгруэнция* σ *является единственным коатомом* $Con\langle A, p, f \rangle$.

Доказательство. Если операция f инъективна, то $\sigma = \bigtriangleup$, а по теореме 2 [13], алгебра $\langle A, p, f \rangle$ проста, откуда вытекает доказываемое утверждение.

Пусть теперь операция f неинъективна и унар $\langle A, f \rangle$ не является связным унаром с одноэлементным подунаром. По лемме 2 [13] имеем $\sigma \neq \bigtriangledown$, то есть, $\sigma < \bigtriangledown$.

Предположим, что найдется такая конгруэнция θ алгебры $\langle A, p, f \rangle$, что $\sigma < \theta < \bigtriangledown$. Тогда существует такая пара $(x, y) \in \theta$, что $(x, y) \notin \sigma$, где $x, y \in A$ и $x \neq y$. По определению конгруэнции σ, имеем $f^n(x) \neq f^n(y)$ для любого $n > 0$. Следовательно, $k(x, y) = \infty$. По лемме 5 [14], $(x, y) \notin \theta$, что противоречит выбору пары (x, y).

Таким образом, конгруэнция σ — коатом решетки $Con\langle A, p, f \rangle$. Его единственность следует из леммы 2. □

Лемма 4. *Пусть унарный редукт* $\langle A, f \rangle$ *алгебры* $\langle A, p, f \rangle$ *— неодноэлементный связный унар, имеющий одноэлементный подунар. Пусть также* $\theta \in Con\langle A, p, f \rangle$, $(b, c) \in \theta$, $b \neq c$ *и* $t(b) < t(c)$ *для некоторых* $b, c \in A$. *Тогда для любых* $x, y \in A$ *из* $t(x) < t(c)$ *и* $t(y) < t(c)$ *следует, что* $x\theta y$ *и* $x, y \in [c]\theta$.

Доказательство. Пусть $\theta \in Con\langle A, p, f\rangle$, $(b, c) \in \theta$, $b \neq c$ и $t(b) < t(c)$ для некоторых $b, c \in A$. Из последнего, в силу леммы 10 [13], вытекает $k(b, c) = t(c)$.

Пусть $x, y \in A$, $x \neq y$ и $t(x) < t(c)$, и $t(y) < t(c)$. По лемме 10 [13], $k(x, c) = t(c)$. Тогда, из (1) получаем, что $p(x, c, b) = b$. В то же время, $p(x, c, c) = x$, откуда с учетом $b\theta c$ получаем $x\theta b$. Аналогично, $y\theta b$ и, окончательно, $x\theta y$. □

Следствие 1. *Пусть $\langle A, f\rangle$ — произвольный неодноэлементный связный унар с одноэлементным подунаром и $c \in A$. Если элемент c и все элементы из A, имеющие глубину, меньшую $t(c)$, лежат в некотором классе конгруэнции $\theta \in Con\langle A, p, f\rangle$, то все элементы глубины $t(c)$ лежат в этом классе.*

Доказательство. Пусть a – неподвижный элемент унара $\langle A, f\rangle$. По условию, $a\theta c$. Предположим, что для некоторого элемента $x \in A$, где $t(x)=t(c)$, утверждение леммы не выполняется, то есть $x \notin [c]\theta$. Поскольку $t(x)=t(c)$, то $k(x, a) = k(a, c)$. Тогда из (1) получаем, что $p(x, a, c) = c$. В то же время, $p(x, a, a) = x$, откуда $x\theta c$, что противоречит предположению. □

Следствие 2. *Если конгруэнция θ удовлетворяет условию леммы 4, то $\theta = \beta_{t(c)}$.*

Лемма 5. *Пусть унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, p, f\rangle$ связен, содержит одноэлементный подунар и имеет конечную глубину $m > 1$. Тогда конгруэнция σ_{m-1} является единственным коатомом решетки $Con\langle A, p, f\rangle$.*

Доказательство. Пусть $t(A) = m > 1$. По лемме 1 [13] имеем $\sigma_{m-1} < \sigma_m = \bigtriangledown$. Предположим, что найдется такая конгруэнция θ алгебры $\langle A, p, f\rangle$, что $\sigma_{m-1} < \theta < \bigtriangledown$. Тогда для некоторой пары $(x, y) \in \theta$ имеем $(x, y) \notin \sigma_{m-1}$, где $x, y \in A$, $x \neq y$. Из определения отношения σ_{m-1} следует, что $f^{m-1}(x) \neq f^{m-1}(y)$. Тогда либо $t(x) = t(y) = m$, либо, без ограничения общности, $t(x) \leqslant m - 1$ и $t(y) = m$.

В случае, если $t(x) \leqslant m - 1$ и $t(y) = m$, по следствию 2 имеем $\theta = \beta_m$. Однако $\beta_m = \bigtriangledown$, что противоречит выбору конгруэнции θ. Таким образом, σ_{m-1} — коатом решетки $Con\langle A, p, f\rangle$.

Пусть теперь $t(x) = t(y) = m$. Поскольку $\theta < \bigtriangledown$, то найдется такой элемент $c \in A$, что $(y, c) \notin \theta$.

Так как $x\theta y$, то $p(c, x, y)\theta p(c, y, y)$. Поскольку $(x, y) \notin \sigma_{m-1}$ и $x \neq y$, то $f^{m-1}(x) \neq f^{m-1}(y)$, и следовательно, $k(x, y) = m$. Так как $t(c) \leqslant m$, то $k(c, x) \leqslant m = k(x, y)$. Тогда $y = p(c, x, y)\theta p(c, y, y) = c$, что противоречит условию $(y, c) \notin \theta$. Таким образом, σ_{m-1} — коатом решетки $Con\langle A, p, f\rangle$.

Предположим теперь, что в $Con\langle A, p, f\rangle$ существует коатом φ, не совпадающий с σ_{m-1}. Тогда найдется такая пара $(b, c) \in \varphi$, что $(b, c) \notin \sigma_{m-1}$, где $b, c \in A$, $b \neq c$. Из определения отношения σ_{m-1} следует, что $f^{m-1}(b) \neq f^{m-1}(c)$. Отсюда, как и выше, выполняется либо $t(b) \leqslant m - 1$ и $t(c) = m$, либо $t(b) = t(c) = m$.

В случае, если $t(b) \leqslant m - 1$ и $t(c) = m$, по следствию 2 получаем, что $\varphi = \beta_m$. Однако $\beta_m = \bigtriangledown$, что противоречит выбору φ как коатома решетки $Con\langle A, p, f\rangle$.

Пусть теперь $t(b) = t(c) = m$. Поскольку $\varphi < \bigtriangledown$, то найдется такой элемент $z \in A$, что $(z, c) \notin \varphi$. Так как $b\varphi c$, то $p(z, b, c)\varphi p(z, c, c)$. Учитывая, что $t(z) \leqslant m$, получаем $c = p(z, b, c)\varphi p(z, c, c) = z$, что противоречит условию $(z, c) \notin \varphi$.

Окончательно, получаем, что σ_{m-1} — единственный коатом решетки $Con\langle A, p, f\rangle$. □

Лемма 6. *Для любых неединичных конгруэнций θ и φ алгебры $\langle A, p, f\rangle$ выполняется неравенство $\theta \vee \varphi < \bigtriangledown$.*

Доказательство. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. $\langle A, f\rangle$ не является связным унаром с одноэлементным подунаром.

Тогда, по лемме 3, конгруэнция σ является единственным коатомом решетки $Con\langle A, p, f\rangle$. Следовательно, для любых неединичных конгруэнций θ и φ алгебры $\langle A, p, f\rangle$ выполняются условия $\theta \leqslant \sigma$, $\varphi \leqslant \sigma$. Отсюда, $\theta \vee \varphi \leqslant \sigma$. По лемме 2 [13] имеем $\sigma \neq \bigtriangledown$, то есть, $\sigma < \bigtriangledown$. Таким образом, $\theta \vee \varphi < \bigtriangledown$.

Случай 2. $\langle A, f\rangle$ – неодноэлементный связный унар, имеющий одноэлементный подунар.

Пусть унар $\langle A, f\rangle$ имеет конечную глубину m. Если $m = 1$, то по теореме 2 [13], алгебра $\langle A, p, f\rangle$ проста, и утверждение леммы очевидно.

Если же $m > 1$, то для любых неединичных конгруэнций θ и φ алгебры $\langle A, p, f\rangle$ в силу леммы 5 выполняются условия $\theta \leqslant \sigma_{m-1}$, $\varphi \leqslant \sigma_{m-1}$. Следовательно, $\theta \vee \varphi \subseteq \sigma_{m-1}$. По лемме 1 [13], $\sigma_{m-1} \neq \bigtriangledown$, откуда $\theta \vee \varphi < \bigtriangledown$.

Пусть теперь глубина унара $\langle A, f\rangle$ бесконечна. По лемме 2, имеем $\theta \subseteq \sigma_k$ и $\varphi \subseteq \sigma_n$ для некоторых $k, n \in N$. Следовательно, $\theta \vee \varphi \subseteq \sigma_k \vee \sigma_n$. Без ограничения общности положим $k \leqslant n$. Тогда $\sigma_k \vee \sigma_n = \sigma_n$. Из леммы 1 [13] следует, что $\sigma_n < \bigtriangledown$. Таким образом, $\theta \vee \varphi < \bigtriangledown$. □

Теорема 1. *Пусть $\langle A, p, f\rangle$ — унар с мальцевской операцией $p(x, y, z)$, определенной по правилу* (1). *Решетка $Con\langle A, p, f\rangle$ не имеет коатомов тогда и только тогда, когда унар $\langle A, f\rangle$ связен, содержит одноэлементный подунар и имеет бесконечную глубину. В других случаях $Con\langle A, p, f\rangle$ имеет единственный коатом.*

Доказательство. Пусть унар $\langle A, f\rangle$ связен, содержит одноэлементный подунар и имеет бесконечную глубину. Обозначим через a неподвижный элемент унара $\langle A, f\rangle$.

Предположим, что решетка $Con\langle A, p, f\rangle$ имеет коатом φ. Тогда, по лемме 2, конгруэнция φ содержится в σ_n для некоторого n. По лемме 1 [13], имеем $\sigma_n < \bigtriangledown$. Однако, по предположению, φ — коатом $Con\langle A, p, f\rangle$, а значит, $\varphi = \sigma_n$.

Так как унар $\langle A, f\rangle$ имеет бесконечную глубину, то и $\sigma_{n+1} < \bigtriangledown$. В то же время, $\sigma_n \leqslant \sigma_{n+1}$. Докажем, что $\sigma_n \neq \sigma_{n+1}$. Поскольку $t(A) = \infty$, то найдутся такие элементы $b, c \in A$, что $b \neq c$, $t(b) = n$ и $t(c) = n + 1$. Из условия $t(b) = n$ следует, что $f^{n+1}(b) = f(a) = a$. Аналогично, из $t(c) = n + 1$ вытекает $f^{n+1}(c) = a$. Отсюда, $(b, c) \in \sigma_{n+1}$. Однако, предполагая, что $(b, c) \in \sigma_n$, получаем $f^n(c) = f^n(b) = a$, что противоречит условию $t(c) = n + 1$, а значит,

$\sigma_n \neq \sigma_{n+1}$. Таким образом, $\varphi = \sigma_n < \sigma_{n+1} < \bigtriangledown$, что противоречит выбору φ. Следовательно, решетка $Con\langle A, p, f\rangle$ в данном случае не имеет коатомов.

Пусть теперь унар $\langle A, f\rangle$ связен, содержит одноэлементный подунар и имеет глубину 1. Тогда, по теореме 2 [13], алгебра $\langle A, p, f\rangle$ конгруэнц-проста. Отсюда, $\bigtriangleup$ является единственным коатомом решетки $Con\langle A, p, f\rangle$. В других случаях единственность коатома решетки $Con\langle A, p, f\rangle$ следует из лемм 3 и 5. $\square$

Следствие 3. *Пусть решетка $Con\langle A, p, f\rangle$ имеет единственный коатом. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Если $\langle A, f\rangle$ — связный унар глубины 1, имеющий одноэлементный подунар, то коатомом решетки $Con\langle A, p, f\rangle$ является конгруэнция $\bigtriangleup$;*

2. *Если $\langle A, f\rangle$ — связный унар конечной глубины $m > 1$, имеющий одноэлементный подунар, то коатомом решетки является конгруэнция σ_{m-1};*

3. *В оставшихся случаях коатомом решетки является конгруэнция σ.*

Теорема 2. *Пусть $\langle A, p, f\rangle$ — унар с мальцевской операцией $p(x, y, z)$, определенной по правилу* (1). *Следующие утверждения равносильны:*

1. *$Con\langle A, p, f\rangle$ — решетка с дополнениями (решетка с единственными дополнениями, булева решетка);*

2. *$Con\langle A, p, f\rangle$ — решетка с относительными дополнениями (обобщенная булева решетка);*

3. *алгебра $\langle A, p, f\rangle$ конгруэнц-проста;*

4. *либо операция f инъективна, либо унар $\langle A, f\rangle$ содержит такой элемент a, что $f(x) = a$ для любого $x \in A$.*

Доказательство. Классы решеток, перечисленные в пункте 1, совпадают, так как рассматриваемый класс алгебр $\langle A, p, f\rangle$ является конгруэнц-дистрибутивным. То же замечание верно для пункта 2.

По теореме 2 [13], (3) $\Leftrightarrow$ (4). Очевидно, что (3) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (1). Чтобы обосновать, что (1) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (4), достаточно показать, в силу теоремы 1 и леммы 1, что в случае когда унар $\langle A, f\rangle$ связен, содержит одноэлементный подунар и имеет бесконечную глубину, то $Con\langle A, p, f\rangle$ не является решеткой с дополнениями.

Допустим, что унар $\langle A, f\rangle$ удовлетворяет перечисленным выше условиям. Тогда, по теореме 2 [13], алгебра $\langle A, p, f\rangle$ не является простой, то есть

$$|Con\langle A, p, f\rangle| > 2.$$

Следовательно, решетка $Con\langle A, p, f\rangle$ содержит хотя бы одну нетривиальную конгруэнцию ρ. Предположим, что ρ имеет дополнение ρ' в $Con\langle A, p, f\rangle$. Тогда

$\rho \vee \rho' = \bigtriangledown$, и из леммы 6 следует, что $\rho' = \bigtriangledown$. Отсюда, $\rho \wedge \rho' = \rho$, что, с учетом условия $\rho \wedge \rho' = \bigtriangleup$, противоречит выбору конгруэнции ρ. Следовательно, решетка $Con\langle A, p, f\rangle$ не является решеткой с дополнениями. □

Следствие 4. *Любая нетривиальная конгруэнция алгебры $\langle A, p, f\rangle$ не имеет дополнения.*

Известно (см., напр., следствия 2 [21, стр. 151] и 7.2 [23, стр. 16]), что если решетка конгруэнций универсальной алгебры дистрибутивна, то она является решеткой с псевдодополнениями.

Отсюда, в силу того, что класс алгебр $\langle A, p, f\rangle$ является конгруэнц-дистрибутивным, вытекает, что любая решетка конгруэнций алгебры из рассматриваемого класса является решеткой с псевдодополнениями. Следующее предложение показывает, что верно и двойственное утверждение.

Предложение 1. *Пусть $\langle A, p, f\rangle$ — унар с мальцевской операцией $p(x, y, z)$, определенной по правилу* (1). *Решетка $Con\langle A, p, f\rangle$ является решеткой с копсевдодополнениями.*

Доказательство. Пусть $\theta \in Con\langle A, p, f\rangle$, $\theta \neq \bigtriangledown$. Очевидно, $\theta \vee \bigtriangledown = \bigtriangledown$. Пусть $\alpha \in Con\langle A, p, f\rangle$ и $\theta \vee \alpha = \bigtriangledown$. Из последнего равенства, с учетом леммы 6, следует $\alpha = \bigtriangledown$. Тогда $\bigtriangledown$ — копсевдодополнение элемента θ.

Пусть теперь $\theta = \bigtriangledown$. Тогда $\theta \vee \bigtriangledown = \bigtriangledown \vee \bigtriangleup = \bigtriangledown$. Поскольку для любой конгруэнции $\alpha \in Con\langle A, p, f\rangle$ из условия $\theta \vee \alpha = \bigtriangledown \vee \alpha = \bigtriangledown$ следует $\bigtriangleup \leq \alpha$, то $\bigtriangleup$ — копсевдодополнение элемента θ. □

Очевидно, решетка является геометрической тогда и только тогда, когда она полная, точечная, полумодулярная и все атомы в ней компактны (см. [21, стр. 233]).

Пусть L – полная решетка и $a \in L$. Элемент a называется *компактным*, если для любого подмножества $X \subseteq L$ из $a \leqslant \bigvee X$ следует, что $a \leqslant \bigvee X_1$ для некоторого конечного подмножества $X_1 \subseteq X$.

Предложение 2. *Решетка $Con\langle A, p, f\rangle$ является геометрической тогда и только тогда, когда она точечная.*

Доказательство. Необходимость утверждения очевидна.

Докажем его достаточность. Пусть $Con\langle A, p, f\rangle$ — точечная решетка. Тогда, по теореме 2 [15], либо операция f инъективна на A, либо унар $\langle A, f\rangle$ содержит такой элемент a, что $f(x) = a$ для любого $x \in A$. Отсюда, по теореме 2 [13], алгебра $\langle A, p, f\rangle$ является простой, то есть имеет единственный атом $\bigtriangledown$. Следовательно, по определению компактного элемента имеем, что $\bigtriangledown$ — компактный элемент решетки $Con\langle A, p, f\rangle$. Поскольку класс алгебр $\langle A, p, f\rangle$ модулярен, то решетка $Con\langle A, p, f\rangle$ полумодулярна. Кроме того, как решетка конгруэнций она является полной. Отсюда, $Con\langle A, p, f\rangle$ является геометрической решеткой. □

Из предложения 2 и теоремы 2 [15] вытекает

Следствие 5. *Решетка $Con\langle A, p, f\rangle$ является геометрической тогда и только тогда, когда либо операция f инъективна, либо унар $\langle A, f\rangle$ содержит такой элемент a, что $f(x) = a$ для любого $x \in A$.*

4. Заключение

Полученные результаты продолжают исследования свойств алгебр $\langle A, p, f\rangle$ с мальцевской операцией $p(x, y, z)$, определенной по правилу (1).

Автор выражает искреннюю благодарность В. Л. Усольцеву за постановку задач и постоянное внимание к работе, а также А. П. Бощенко и В. К. Карташову за ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карташов В. К. Об унарах с мальцевской операцией // Универсальная алгебра и ее приложения: Тез. сообщ. участ. междунар. семинара, посвящ. памяти проф. Моск. гос. ун-та Л.А. Скорнякова. Волгоград: Перемена, 1999. С. 31–32.

2. Курош А. Г. Общая алгебра. Лекции 1969-1970 учебного года. М.: Наука, 1974. 160 с.

3. Johnsson B. A survey of Boolean algebras with operators // Algebras and Orders, NATO ASI Series. 1993. Vol. 389. P. 239–286

4. Hyndman J., Nation J. B., Nishida J. Congruence lattices of semilattices with operators, 2015, preprint. Источник: www.math.hawaii.edu/∼jb/conslo_submit.pdf (дата обращения июнь 2015).

5. Bonsangue M. M., Kurz A., Rewitzky I. M. Coalgebraic representations of distributive lattices with operators //Topology and its Applications. 2007. Vol. 154. No. 4. Pp. 778-791.

6. Adaricheva K. V., Nation J. B. Lattices of quasi-equational theories as congruence lattices of semilattices with operators: part I, part II // International Journal of Algebra and Computation. 2012. Vol. 22. Issue 07, part I: 27 p., part II: 16 p.

7. Nurakunov A. M. Equational theories as congruences of enriched monoids // Algebra Universalis. 2008. Vol. 58. No. 3. Pp. 357-372.

8. Berman J. On the congruence lattices of unary algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 36. No. 1. Pp. 34–38.

9. Егорова Д. П., Скорняков Л. А. О структуре конгруэнций унарной алгебры // Упорядоченные множества и решетки: Межвуз. науч. сб. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1977. Вып. 4. С. 28–40.

10. Бощенко А. П. Псевдодополнения в решетке конгруэнций унаров // Алгебраические системы: Межвуз. сб. научн. р. Волгоград: ВГПИ, 1989. С. 23–26.

11. Бощенко А. П. О копсевдодополнениях в решетках конгруэнций унаров // Универсальная алгебра и ее приложения: Тр. участ. междунар. семинара, посвящ. памяти проф. Моск. гос. ун-та Л.А. Скорнякова. Волгоград, 6–11 сент. 1999 г. Волгоград: Перемена, 1999. С. 39–44.

12. Pixley A. F. Distributivity and permutability of congruence relations in equational classes of algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 14. No. 1. Pp. 105–109.

13. Усольцев В. Л. Простые и псевдопростые алгебры с операторами // Фунд. и прикл. матем. 2008. Т. 14. Вып. 7. С. 189–207.

14. Усольцев В. Л. О подпрямо неразложимых унарах с мальцевской операцией // Известия Волг. гос. пед. ун-та, сер. "Естественные и физико-математические науки". 2005. N 4(13). С. 17–24.

15. Усольцев В. Л. Строение атомов в решетках конгруэнций алгебр одного класса унаров с мальцевской операцией // Современные проблемы гуманит. и ест. наук: Мат. XVIII Межд. науч.-практ. конф. М.: Спецкнига, 2014. С. 39–44.

16. Усольцев В. Л. О строго простых тернарных алгебрах с операторами // Чебышевский сб. 2013. Т. 14. Вып. 4(48). С. 196–204.

17. Лата А. Н. Конгруэнц-однородные унары со стандартной мальцевской операцией // Вестник СНО. Вып. 28. Волгоград: Перемена, 2012. С. 227–231.

18. Лата А. Н. Конгруэнц-регулярные унары со стандартной мальцевской операцией // Вестник СНО. Вып. 29. Волгоград: Перемена, 2013. С. 317–321.

19. Лата А. Н. Слабо регулярные унары со стандартной мальцевской операцией // Чебышевский сб. 2013. Т. 14. Вып. 4(48). С. 146–153.

20. Салий В. Н. Решетки с единственными дополнениями. М: Наука, 1984. 128 с.

21. Гретцер Г. Общая теория решеток. М.: Мир, 1982. 456 с.

22. Артамонов В. А. [и др.] Общая алгебра. Т.2. / под общей ред. Л. А. Скорнякова. М.: Наука, 1991. 480 с.

23. Смирнов Д. М. Многообразия алгебр. Новосибирск: ВО "Наука". Сибирская изд. фирма, 1992. 205 с.

24. Wenzel G. H. Subdirect irreducibility and equational compactness in unary algebras $\langle A; f\rangle$ // Arch. Math. (Basel). 1970. Vol. 21. Pp. 256–264.

REFERENCES

1. Kartashov, V. K. 1999, "On unars with Mal'tsev operation", *Universal'naya algebra i ee prilozheniya: Tezisy soobshheniy uchastnikov mezhdunarodnogo seminara, posvyashhennogo pamyati prof. Moskovskogo Gos. Univ. L. A. Skornyakova*, Peremena, Volgograd, pp. 31–32. (Russian)

2. Kurosh, A. G. 1974, "Obshchaya algebra. Lekcii 1969-1970 uchebnogo goda" [General Algebra. Lectures 1969-1970 Academic Year], *Nauka*, Moscow, 160 pp. (Russian)

3. Johnsson, B. 1993, "A survey of Boolean algebras with operators", *Algebras and Orders, NATO ASI Series*, vol. 389, pp. 239–286. doi: 10.1007/978-94-017-0697-1_6

4. Hyndman, J., Nation, J. B. & Nishida, J. 2015, "Congruence lattices of semilattices with operators", preprint. Available at: www.math.hawaii.edu/~jb/conslo_submit.pdf (accessed June 2015)

5. Bonsangue, M. M., Kurz, A. & Rewitzky, I. M. 2007, "Coalgebraic Representations of Distributive Lattices with Operators", *Topology and its Applications*, vol. 154, issue 4, pp. 778-791. doi: 10.1016/j.topol.2005.10.010

6. Adaricheva, K. V. & Nation, J. B. 2012, "Lattices of quasi-equational theories as congruence lattices of semilattices with operators", *International Journal of Algebra and Computation*, vol. 22, issue 07, part I: 27 pp. doi: 10.1142/S0218196712500658; part II: 16 pp. doi: 10.1142/S021819671250066X

7. Nurakunov, A. M. 2008, "Equational theories as congruences of enriched monoids", *Algebra Universalis*, vol. 58, no. 3, pp. 357–372. doi: 10.1007/s00012-008-2080-2

8. Berman, J. 1972, "On the congruence lattices of unary algebras", *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 36, no. 1, pp. 34–38. doi: 10.2307/2039033

9. Egorova, D. P. & Skornyakov, L. A. 1977, "On the congruence lattice of unary algebra", *Uporyadochennye Mnozhestva i Reshetki: Mezhvuzovskiy Nauchnyy Sbornik*, Izdatel'stvo Saratovskogo universiteta, Saratov, issue 4, pp. 28–40. (Russian)

10. Boshhenko, A. P. 1989, "Pseudocomplements in congruence lattices of unars", *Algebraicheskie Sistemy: Mezhvuzovskiy Sbornik Nauchnyh Rabot*, Izdatel'stvo VGPI imeni A.S. Serafimovicha, Volgograd, pp. 23–26. (Russian)

11. Boshhenko, A. P. 2000, "On dual pseudocomplements in congruence lattices of unars", *Universal'naya algebra i ee prilozheniya: Trudy Uchastnikov Mezhdunarodnogo Seminara, posvyashhennogo pamyati prof. Moskovskogo Gos. Univ. L. A. Skornyakova*, Peremena, Volgograd, pp. 39–44. (Russian)

12. Pixley, A. F. 1963, "Distributivity and permutability of congruence relations in equational classes of algebras", *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 14, no. 1, pp. 105–109. doi: 10.1090/S0002-9939-1963-0146104-X

13. Usol'tsev, V. L. 2008, "Simple and pseudosimple algebras with operators", *Fundamental'naya i prikladnaya matematika* vol. 14, no. 7, pp. 189–207 (Russian); translation in *Journal of Mathematical Sciences*, 2010, vol. 164, no. 2, pp. 281-293. doi: 10.1007/S1095800997306

14. Usol'tsev, V. L. 2005, "On subdirect irreducible unars with Mal'tsev operation", *Izvestiya VGPU. Seriya estestvennye i fiziko-matematicheskie nauki*, Volgograd, no. 4(13), pp. 17-24. (Russian)

15. Usol'tsev, V. L. 2014, "Structure of atoms in congruence lattices of algebras from one class of unars with Mal'tsev operation", *Sovremennye problemy gumanitarnyh i estestvennyh nauk: Materialy XVIII Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferencii 26-27 marta 2014 g.*, Spetskniga, Moscow, pp. 39–44. (Russian)

16. Usol'tsev, V. L. 2013, "On strictly simple ternary algebras with operators", *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 14, no. 4, pp. 196–204. (Russian)

17. Lata, A. N. 2012, "Uniform unars with standard Mal'tsev operation", *Vestnik Studencheskogo Nauchnogo Obshhestva*, Peremena, Volgograd, issue 28, pp. 227–231. (Russian)

18. Lata, A. N. 2013, "Regular unars with standard Mal'tsev operation", *Vestnik Studencheskogo Nauchnogo Obshhestva*, Peremena, Volgograd, issue 29, pp. 317–321. (Russian)

19. Lata, A. N. 2013, "Weakly regular unars with standard Mal'tsev operation", *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 14, no. 4, pp. 146–153. (Russian)

20. Salii, V. N. 1988, "Lattices with unique complements", Translations of the American Mathematical Society, *American Mathematical Society*, Providence, R.I.

21. Grätzer, G. 1978, "General Lattice Theory", *Akademie-Verlag*, Berlin.

22. Artamonov, V. A., Salii, V. N., Skornyakov, L. A., Shevrin, L. N. & Shul'geifer, E. G. 1991, "Obshchaya algebra. Tom 2"[General algebra. Vol. 2], in Skornyakov, L. A. (ed.), *Nauka*, Moscow, 480 pp. (Russian)

23. Smirnov, D. M. 1992, "Mnogoobraziya algebr"[Varieties of algebras], *VO "Nauka", Sibirskaya izdatel'skaya firma*, Novosibirsk, 205 pp. (Russian)

24. Wenzel, G. H. 1970, "Subdirect irreducibility and equational compactness in unary algebras $\langle A; f\rangle$", *Archiv der Mathematik*, Basel, vol. 21, pp. 256–264. doi: 10.1007/BF01220912

Волгоградский государственный социально-педагогический университет.
Получено 12.10.2015.