ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 16. Выпуск 4.

УДК 512.745.2

МАЛАЯ ГРУППА ВЕЙЛЯ И МНОГООБРАЗИЕ ВЫРОЖДЕННЫХ ОРИСФЕР[1]

В. С. Жгун (г. Москва)

Посвящено академику В. П. Платонову в честь его 75-летия

Аннотация

Пусть G — связная редуктивная группа, действующая на нормальном алгебраическом многообразии X. Мы исследуем эквивариантную геометрию кокасательного расслоения многообразия X и применяем полученные результаты для исследования малой группы Вейля. Цель настоящей статьи обобщить на случай квазипроективных многообразий результаты Э. Б. Винберга [19], который построил рациональное накрытие Галуа T^*X для квазиаффинного X с помощью кокасательного расслоения к пространству так называемых общих орисфер. Как хорошо известно, пример многообразия флагов показывает, что эти результаты не могут быть обобщены дословно.

Мы развиваем идеи Д. А. Тимашева [18], который получил обобщение результатов Винберга для более общего класса многообразий, чем квазиаффинные многообразия, но более узкого чем квазипроективные.

Мы построим семейство орисфер меньшей размерности на X, которое мы назовем вырожденными орисферами, и многообразие $\mathcal{H}or$, параметризующее это семейство, которое, тем не менее, имеет ту же размерность, что и многообразие, параметризующее общие орисферы. Более того, в квазиаффинном случае наша конструкция показывает, что множество вырожденных орисфер совпадает с множеством общих орисфер.

Мы покажем, что для построенного семейства вырожденных орисфер существует G-эквивариантное симплектическое рациональное накрытие кокасательных расслоений $T^*_{\mathcal{H}or} \dashrightarrow T^*_X$. Будет доказано, что конечное расширение полей рациональных функций на этих многообразиях, соответствующее построенному накрытию, является расширением Галуа, а его группа Галуа изоморфна малой группе Вейля.

[1]Работа автора была частично поддержана следующими грантами РФФИ 15-01-02094 а, РФФИ 13-01-12402 офи-м2, работа над теоремой 6 была поддержана грантом РНФ 14-21-00052 от 11.08.14. Часть работы была выполнена в Лаборатории алгебраической геометрии и ее приложений при финансовой поддержке Правительства РФ в рамках реализации «Дорожной карты» Программы 5/100 Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики».

В качестве приложения этих результатов мы получим описание образа отображения моментов и нормализованного отображения моментов для T^*_X, используя только геометрические методы. Последнее описание впервые появилось в работах Кнопа, тем не менее, его обоснование не является элементарным, поскольку в нем используются методы дифференциальных операторов.

Ключевые слова: Кокасательное расслоение, отображение моментов, орисферы, теорема о локальной структуре, малая группа Вейля.
Библиография: 21 название.

LITTLE WEYL GROUPS AND VARIETY OF DEGENERATE HOROSPHERES

V. S. Zhgoon (Moscow)

Abstract

Let G be a connected reductive group acting on an irreducible normal algebraic variety X. We study equivariant geometry of the cotangent vector bundle X, and we apply these results to study of a little Weyl group. The aim of this paper is to extend various results of E. B. Vinberg, who constructed a rational Galois cover of T^*X of quasiaffine X by means of cotangent bundle to the so-called variety of generic horosheres. It is well-known that the example of a flag variety shows that these results could not be generalized directly.

We develop the results of D. A. Timashev [18], who obtained the generalizations of the results of Vinberg to the class of varieties wider than quasiaffine but smaller than quasiprojective.

We construct a family of horospheres of a smaller dimension in X which are called degenerate, and a variety $\mathcal{H}or$ parameterizing this family, which has the same dimension as the variety parametrizing generic horosheres. Moreover in the quasiaffine case our construction shows that the familly of degenerate horosheres coincides with the familly of generic ones.

We show that for constructed family of horosheres there exists a rational G-equivariant symplectic Galois covering of cotangent vector bundles $T^*\mathcal{H}or \dashrightarrow T^*X$. It is proved that the extension of the fields of rational functions corresponding to this cover is a finite Galois extension with the Galois group isomorphic to the little Weyl group.

As an application we get the description of the image of the moment map of T^*X and the image of the normalized moment map by means of purely geometric methods. The first description of the image of the normalized moment map was obtained by F. Knop, nevertheless his proof is non-elementary since it involves the methods of differential operators.

Keywords: Cotangent bundle, moment map, horosphere, local structure theorem, little Weyl group
Bibliography: 21 titles.

1. Введение

Пусть G — связная редуктивная группа, действующая на нормальном алгебраическом многообразии X. Цель настоящей статьи обобщить на случай квазипроективных многообразий результат Э. Б. Винберга [19], который построил рациональное накрытие Галуа T^*_X для квазиаффинного X с помощью кокасательного расслоения к пространству общих орисфер.

Под орисферами мы понимаем орбиты всех максимальных унипотентных подгрупп G в X. Можно показать, что множество общих орисфер (то есть общих орбит максимальных унипотентных подгрупп в G) может быть снабжено структурой алгебраического многообразия. Группа Галуа этого рационального накрытия равна малой группе Вейля многообразия X. Этот результат не может быть непосредственно обобщен на случай произвольных многообразий, поскольку множество общих орисфер не подходит для этих целей, что легко видеть в случае, когда X является многообразием флагов.

Указанные результаты Э. Б. Винберга были обобщены Д. А. Тимашевым в [18] на некоторый более общий класс, чем квазиаффинные многообразия. Упомянутый класс многообразий, в частности, включает в себя обобщенные многообразия флагов (тем не менее он содержит не все орисферические многообразия).

В настоящей работе мы построим семейство вырожденных орисфер и многообразие $\mathcal{H}or$, которое их параметризует. Также мы построим рациональное накрытие $T^*_{\mathcal{H}or} \dashrightarrow T^*_X$ для соответствующих кокасательных расслоений и покажем, что его группа Галуа является малой группой Вейля, опеределенной Ф. Кнопом [9].

Опишем структуру работы. В первой части мы напоминаем необходимые факты, связанные с так называемой теоремой о локаольной структуре. Во второй части, используя идеи Кнопа [12], с помощью клеток Бялиницкого-Бируля мы строим слоение вырожденных орисфер, такое, что образ конормального расслоения к этому слоению при отображении действия группы G плотен в T^*_X. В третьей части мы обобщаем конструкцию Винберга, которая связывает T^*_X и кокасательное расслоение к построенному семейству орисфер. Последняя часть посвящена доказательству того, что группа Галуа рационального накрытия $T^*_{\mathcal{H}or} \dashrightarrow T^*_X$ равна малой группе Вейля W_X. Мы также даем элементарное описание образа нормализованного отображения моментов.

Автор благодарен Д. А. Тимашеву за плодотворное сотрудничество, а также Э. Б. Винбергу, М. Бриону и Ф. Кнопу за полезные обсуждения.

2. Соглашения и обозначения

Все многообразия рассматриваются над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль.

Готическими буквами мы обозначаем алгебры Ли, соответствующие алгебраические группы обозначаются заглавными латинскими буквами.

Зафиксируем G-инвариантную билинейную симметрическую форму на $\mathfrak{g}$, с помощью которой мы отождествим $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$. Для коприсоединенного действия $G : \mathfrak{g}^*$ и подпространства $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ через $\mathfrak{h}^\perp$ обозначим аннулятор $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}^*$.

Зафиксируем борелевскую подгруппу $B \subset G$ и максимальны тор $T \subset B$. Пусть B^- — единственная борелевская подгруппа в G, такая что $B^- \cap B = T$. Через $P \supset B$ обозначим параболическую подгруппу, а через P_u — ее унипотентный радикал. Через $P^- \supset B^-$ оборзначим параболическую подгруппу (с унипотентным радикалом P_u^-) противоположную к P.

Пусть $\Xi = \Xi(T)$ — решетка характеров тора T и пусть $\Lambda = \Lambda(T)$ — решетка однопараметрических подгрупп T. Для однопараметрической подгруппы $\lambda\colon \mathbb{K}^* \to T$ и характера $\chi \in \Xi$ имеет место спаривание $\langle \lambda, \chi \rangle$, определенное по формуле $\chi(\lambda(t)) = t^{\langle \lambda, \chi \rangle}$, отождествляющее Λ и Ξ^*. Для группового закона в Λ и Ξ мы используем аддитивную запись. Для $\chi \in \Xi$ мы обозначаем соответствующий дифференциал в $\mathfrak{t}^*$ той же буквой.

Обозначим через $W = N_G(T)/T$ группу Вейля группы G. Пусть Δ — система корней алгебры Ли $\mathfrak{g}$, соответствующая тору T, и пусть $\Delta^+(\Delta^-)$ системы положительных (отрицательных) корней отвечающие борелевской подалгебре $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$. Через Π мы обозначим систему простых корней в Δ^+. Также имеет место корневое разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus\limits_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$. Для $\alpha \in \Delta$ через $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ обозначим соответствующую образующую базиса Шевалле, а через s_α — соответствующее отражение. $w_0 \in W$ обозначает самый длинный элемент в группе Вейля. Через $\mathfrak{t}^*/W$ мы обозначаем геометрический фактор $\mathfrak{t}^*$ по W. Для параболической подгруппы $P \supset B$ обозначим через L ее подгруппу Леви, содержащую T. Тогда $B_L = L \cap B$ будет борелевской подгруппой в L. Пусть $\Delta_L \subset \Delta$ и $\Delta_L^+ \subset \Delta_L$ — соответствующие системы корней для L а также положительные и отрицательные корни. Подмножество простых корней в Δ_L^+ обозначим через Π_L. Через $C_L \subset \Xi \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ обозначим доминантную камеру Вейля по отношению к системе корней Δ_L^+. C_L° обозначает внутренность C_L. Для параболической подгруппы P (соответственно для ее алгебры Ли $\mathfrak{p}$) содержащей T (соот. $\mathfrak{t}$) обозначим через Δ_{P_u} (соот. $\Delta_{\mathfrak{p}_u}$) подмножество корней в Δ, отвечающее корневому разложению $\mathfrak{p}_u$.

Пусть V_χ — простой G-модуль со старшим весом χ и пусть V_χ^* — двойственный ему модуль. Старший вектор V_χ обозначим через σ_χ а младший вектор в V_χ^* обозначим $\sigma_{-\chi}^*$, $\langle v, w \rangle$ — спаривание для $v \in V_\chi$ и $w \in V_\chi^*$. $\mathrm{Wt}(V_\chi)$ обозначает множество весов действия T на V_χ.

Для алгебраической группы H, операция $(-)^{(H)}$ обозначает взятие H-полуинвариантов а через $(-)_\chi^{(H)}$ мы обозначим подмножество H-полуинвариантов веса χ.

Пусть $G \supset H$ — линейные алгебраические группы, а Z — квазипроективное H-многообразие. Существует квазипроективное G-многообразие $G *_H Z$, которое является фактором $G \times Z$ по диагональному действию H: $(g, z) \mapsto (gh^{-1}, hz)$. Образ точки (g, z) в этом факторе обозначим $g * z$.

Для действия алгебраической группы G на X, ξx обозначает вектор скорости для $\xi \in \mathfrak{g}$ в точке $x \in X$, $\mathfrak{g}x$ — соответственно касательное пространство к орбите Gx в точке x, а G_x — стабилизатор x. Для аффинного X, для конечно порожденной алгебры $\mathbb{K}[X]^G$ G-инвариантных регулярных функций на X через $X/\!\!/G$ обозначим категорный фактор X, изоморфный $\operatorname{Spec} \mathbb{K}[X]^G$. В гладких точках X, мы можем определить отображение моментов $\mu_X : T^*_X \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ (где T^*_X — кокасательное расслоение к X) посредством следующей формулы:

$$\langle \mu_X(\alpha), \xi \rangle = \langle \alpha, \xi x \rangle, \ \forall x \in X, \ \alpha \in T_{X,x}, \ \xi \in \mathfrak{g}.$$

Напомним, что для однородного многообразия $X = G/H$ кокасательное расслоение T^*_X может быть описано как

$$T^*_X \cong G *_H (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^* \cong G *_H \mathfrak{h}^\perp.$$

В этом случае образ отображения моментов слоя над точкой eH индуцировано включением $\mathfrak{h}^\perp \hookrightarrow \mathfrak{g}^*$, а весь образ отображения моментов равен $G\mathfrak{h}^\perp$.

3. Теорема о локальной структуре

Рассмотрим нормальное G-многообразие X и B-инвариантный дивизор Вейля $D = \sum a_i D_i$, где D_i — неприводимые компоненты. Назовем для краткости D B-дивизором. Обозначим через $P[D_i]$ — нормализатор D_i в G. Нормализатор B-дивизора D определяется как пересечение нормализаторов его простых компонент и равен параболической подгруппе $P[D] = \bigcap_{a_i \neq 0} P[D_i]$ группы G. Поскольку число параболических подгрупп содержащих B конечно, существует единственный B-дивизор для которого $P[D]$ абсолютно минимальна. Эту подгруппу обозначим через $P(X)$. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *([11, Лемма 2.2]) Пусть X — нормальное G-многобраие, а $D \subset X$ — простой дивизор. Тогда D является дивизором Картье вне множества $Y = \bigcap\limits_{g \in G} gD$.*

В дальнейшем в качестве D мы возьмем B-инвариантный, но не G-инвариантный дивизор. Таким образом, Y будет строго включено в D, и рассматривая $X \setminus Y$ вместо X, мы можем считать, что D — дивизор Картье.

Заменяя дивизор Картье D на подходящий кратный ему дивизор nD, мы можем считать, что D обладает G-линеаризацией ([8]), и в частности, B-линеаризацией. Любые две G-линеаризации отличаются на характер G, выберем одну из них.

Для дивизора nD рассмотрим соответствующее B-полуинвариатное тавтологическое рациональное сечение σ_{nD} ассоциированного линейного расслоения $\mathcal{O}(nD)$ веса χ_{nD}. Обозначимим $\chi_D := \chi_{nD}/n$.

Определение 1. *([11]) Рассмотрим B-дивизор D веса χ_D. Вес χ_D назовем $P[D]$-регулярным, если $\langle \chi_D, \alpha \rangle \neq 0$ для всех $\alpha \in \Delta_{P[D]_u}$.*

Замечание 1. *Напомним, что $\langle \chi_D, \alpha \rangle = 0$ для всех $\alpha \in \Delta_{L[D]}$, где $L[D] \subset \subset P[D]$ — подгруппа Леви содержащая T. Заметим также, что вес эффективного дивизора D со стабилизатором $P[D]$ автоматически $P[D]$-регулярен. Это следствие теории представлений со старшим весом, примененной к B-полуинвариантному сечению $\sigma_D \in H^0(X, \mathcal{O}(D))^{(B)}_{\chi_D}$, которое является старшим вектором.*

Напомним определение невырожденных многообразий по Кнопу [11]:

Определение 2. *G-многообразие X называется невырожденным, если существует рациональная B-полуинвариантная функция $f_\chi \in \mathbb{K}(X)^{(B)}_\chi$ с дивизором нулей-полюсов $D = (f_\chi)$ с $P(X)$-регулярным весом χ.*

Замечание 2. *Заметим, что квазиаффинные многообразия являются регулярными.*

Для B-дивизора D, рассмотрим следующее $P[D]$-эквивариантное отображение ([11]):

$$\psi_D : X \setminus D \longrightarrow \mathfrak{g}^*, \ x \mapsto l_x, \quad \text{где} \ \ l_x(\xi) = \frac{\xi \sigma_D}{\sigma_D}(x).$$

Напомним версию теоремы о локальной структуре, принадлежащую Кнопу.

Теорема 1. *([11, Thm. 2.3, Prop. 2.4]) Пусть X — нормальное G-многообразие с B-дивизором D с $P[D]$-регулярным весом χ_D. Для точки $x_0 \in X \setminus D$ положим $\eta_0 := \psi_D(x_0)$, $L := G_{\eta_0}$ и $Z := \psi_D^{-1}(\eta_0)$. Тогда:*

(i) Образ ψ_D состоит из одной $P[D]$-орбиты и равен $\eta_0 + \mathfrak{p}[D]_u$, где ограничение линейной функции η_0 на $\mathfrak{p}[D]$ равно χ_D.

(ii) L — подгруппа Леви в $P[D]$ и имеет место изоморфизм

$$P[D] *_L Z \longrightarrow X \setminus D.$$

(iii) Предположим, что выполнено равенство $P[D] = P(X)$. Тогда ядро действия L на Z, которое мы обозначим L_0, содержит коммутант $[L, L]$.

Для простоты обозначим $P(X)$ через P. Заметим, что в теореме точка x_0 может быть выбрана, таким образом, что $L \supset T$, зафиксируем такой выбор.

В условии Теоремы 1 *(iii)*, мы видим, что тор $A := L/L_0 = P/L_0P_u$ действует эффективно на Z (Группу L_0P_u мы обозначим через P_0). Из равенств $\mathbb{K}(X)^{(B)} = \mathbb{K}(Z)^{(B_L)} = \mathbb{K}(Z)^{(L)}$ мы можем отождествить $\Xi(A)$ с группой характеров

$$\Xi(X) = \{\chi \mid \mathbb{K}(X)^{(B)}_\chi \neq 0\}.$$

Заметим, что в качестве следствия теоремы о локально структуре, мы получим, что общие P_0-орбиты совпадают с общими P_u-орбитами.

4. Семейства вырожденных орисфер

В этой части мы построим семейство вырожденных орисфер.

Напомним, что под орисферами мы понимаем орбиты максимальных унипотентных подгрупп группы G.

Мы покажем, что для конормального расслоения $\mathcal{N}_X^*$ к некоторому слоению $\overline{U}$-орбит (для некоторой максимальной унипотентной группы $\overline{U}$) построенному ниже, имеет место равенство $\overline{G\mathcal{N}_X^*} = T_X^*$.

Наша конструкция основана на идеях Кнопа [12]. Основная идея заключается в построении клетки Бялиницкого-Бируля с помощью специального выбора однопараметрической подгруппы.

Этот выбор позволяет избежать использование компактификаций подобных тем, что были использованы в цитируемой статье Кнопа. Наша конструкция также дает более глубокое и детальное понимание устройства конормального расслоения к вырожденным орисферам.

Основным этапом является исследование частного случая орисферических многообразий.

Напомним, что многообразие назыввается орисферическим, если стабилизатор точки общего положения содержит максимальную унипотентную группу.

Исследование случая общего многообразия X обычно сводится к случаю орисферического многообразия посредством орисферического стягивания, определение и доказательство существования которого приведено в работе В. Л. Попова (см. [16]).

В орисферическом многообразии X можно найти G-инвариантное открытое подмножество изоморфное $G/P_0^- \times C$, где G действует на C тривиально и $P_0^- = L_0 P_u^-$. Построив многообразие вырожденных орисфер для $X = G/P_0^-$, мы продолжим его на орисферическое многообразие X посредством умножения на многообразие C. Введем следующие дополнительные обозначения $M := Z_G(\mathfrak{a})$ и $M_0 := [M, M]Z(L_0)$.

Предложение 1. *Пусть $X = G/P_0^-$ — орисферическое однородное пространство. Рассмотрим борелевскую подгруппу $\overline{B} \subset G$, такую что ее алгебра $\overline{\mathfrak{b}}$ содержит разрешимую подалгебру $\mathfrak{a} + (\mathfrak{p}_u^- \cap \mathfrak{m})$. Обозначим через $\overline{U}$ унипотентный радикал $\overline{B}$. Пусть $\mathcal{N}_X^*$ — конормальное расслоение к орбите $\overline{U}P_0^-/P_0^-$, тогда имеем $\overline{G\mathcal{N}_X^*} = T_X^*$.*

Доказательство. Кокасательное расслоение T_X^* отождествляется с

$$G *_{P_0^-} \mathfrak{p}_0^{-\perp} \cong G *_{P_0^-} (\mathfrak{a} + \mathfrak{p}_u^-).$$

Слоем конормального расслоения к орбите $\overline{U}P_0^-/P_0^-$ в точке eP_0^- будет

$$(\overline{\mathfrak{u}} + \mathfrak{p}_0^-)^\perp = \overline{\mathfrak{u}}^\perp \cap \mathfrak{p}_0^{-\perp} = \overline{\mathfrak{b}} \cap (\mathfrak{a} + \mathfrak{p}_u^-) \supset \mathfrak{a} + (\mathfrak{p}_u^- \cap \mathfrak{m}).$$

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть P — некоторая параболическая подгруппа в G а L — подгруппа Леви в P. Тогда для подалгебры $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{l})$ имеем*

$$\overline{P_u(\mathfrak{a} + (\mathfrak{p}_u \cap \mathfrak{m}))} = \mathfrak{a} + \mathfrak{p}_u.$$

Доказательство. Мы покажем, что отображение

$$P_u \times (\mathfrak{a} + (\mathfrak{p}_u \cap \mathfrak{m})) \to \mathfrak{a} + \mathfrak{p}_u$$

доминантно, показав,что дифференциал в точке (e, ξ) сюръективен, для общего $\xi \in \mathfrak{a}$. Вычислим дифференциал в (e, ξ). Используя равенство

$$\mathfrak{p}_u = (\mathfrak{p}_u \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\xi)) \oplus [\mathfrak{p}_u, \xi],$$

выполненное для любого $\xi \in \mathfrak{a}$, и равенство $\mathfrak{p}_u \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\xi) = \mathfrak{p}_u \cap \mathfrak{m}$, выполненное для общего $\xi \in \mathfrak{a}$, мы получим, что дифференциал

$$\mathfrak{p}_u \times (\mathfrak{a} + (\mathfrak{p}_u \cap \mathfrak{m})) \to [\mathfrak{p}_u, \xi] + \mathfrak{a} + (\mathfrak{p}_u \cap \mathfrak{m}) = \mathfrak{a} + \mathfrak{p}_u$$

сюръективен. □

Группа P_u^- действует на слое T_X^* над $x_0 = eP_0^-$, поскольку она лежит в стабилизаторе точки x_0. По предыдущей лемме получаем

$$\overline{P_u^- \mathcal{N}_{X,x_0}^*} \supset \overline{P_u^-(\mathfrak{a} + (\mathfrak{p}_u^- \cap \mathfrak{m}))} = \mathfrak{a} + \mathfrak{p}_u^- = T_{X,x_0}^*.$$

Откуда

$$\overline{G\mathcal{N}_X^*} = G(T_{X,x_0}^*) = T_X^*.$$

□

Нам понадобится следующая элементарная лемма.

Лемма 3. *Рассмотрим X/S и Y/S — два семейства равноразмерных многообразий над некоторым многообразием S, а также S-морфизм $f\colon X/S \to \to Y/S$. Предположим, что существуют гладкие точки $s_0 \in S$ и $x_0 \in X_{s_0}$, такие что многообразия X, X_{s_0} гладкие в $x_0 \in X_{s_0}$, а многообразия Y, Y_{s_0} гладкие в $f(x_0)$, отображение $f_{s_0}\colon X_{s_0} \to Y_{s_0}$ является субмерсией в x_0 (то есть отображение касательных пространств $df_{s_0}\colon T_{X_{s_0},x_0} \to T_{Y_{s_0},f(x_0)}$ — сюръективно), а проекции $X \to S$, $Y \to S$ субмерсивны в x_0 и $f_{s_0}(x_0)$. Тогда морфизм $f_s\colon X_s \to Y_s$ является субмерсией (и в частности доминантен) в общей точке X_s для достаточно общего s.*

Напомним следующее важное предложение о присоединенных орбитах. Для его формулировки мы воспользуемся обозначениями не связанными с остальным текстом статьи.

Предложение 2. *[4, Sec. 5.1, 5.5] Рассмотрим произвольную параболическую подгруппу P в G, с подгруппой Леви L и унипотентном радикалом P_u. Пусть $\mathcal{O}_{\mathfrak{l}}$ — нильпотентная присоединенная орбита L в $\mathfrak{l}$. Пусть $x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{l})$ — произвольный элемент центра $\mathfrak{l}$. Тогда существует единственная G-орбита $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ пересекающая $x+\mathcal{O}_{\mathfrak{l}}+\mathfrak{p}_u$ по открытому плотному подмножеству. Пересечение $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}\cap(x+\mathcal{O}_{\mathfrak{l}}+\mathfrak{p}_u)$ составляет одну P-орбиту. Выполнено следующее равенство $\operatorname{codim}_{\mathfrak{g}}\mathcal{O}_{\mathfrak{g}} = \operatorname{codim}_{\mathfrak{l}}\mathcal{O}_{\mathfrak{l}}$. Также для точки общего положения $z \in x+\mathcal{O}_{\mathfrak{l}}+\mathfrak{p}_u$ стабилизатор z в $\mathfrak{p}_u^-$ тривиален, а подпространство $[\mathfrak{p}_u^-, z]$ транстверсально к $[\mathfrak{l}, z]+\mathfrak{p}_u$. Для неприводимых компонент стабилизаторов выполнено равенство $(P_z)^0 = (G_z)^0$.*

Теперь перейдем к случаю, когда X — произвольное G-многообразие. Мы должны построить семейство $\overline{U}$-орбит для некоторой максимальной унипотентной подгруппы $\overline{U}$, такое что G-разнесение конормального расслоения к этомй слоению плотно в T_X^*.

Теорема 2. *Пусть X — гладкое G-многообразие. Рассмотрим открытое подмножество $X^\circ \cong P *_L Z$, полученное с помощью применеия теоремы о локальной структуре 1 к некоторому B-дивизору со стабилизатором равным параболической подгруппе $P := P(X)$. Тогда существует максимальная унипотентная подгруппа $\overline{U}$ со следующими свойствами:*

(i) Для любого $z \in Z$ имеем $\overline{U}z = (\overline{U} \cap U)z$.

(ii) Пусть $\mathcal{N}_X^*$ — конормальное расслоение к слоению орбит $\overline{U}z$, где $z \in Z$. Тогда имеем $\overline{G\mathcal{N}_X^*} = T_X^*$.

Доказательство.

Наша цель построить клетку Бялиницкого-Бируля, адаптированую к однопараметрической подгруппе $\lambda \in \Lambda(Z(L_0))$. Для этого выберем λ специальным образом. Вспомним, что $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{m}_0$ — параболическая подалгебра $\mathfrak{m}_0$ с подалгеброй Леви $\mathfrak{l}_0$ и нильпотентным радикалом $\mathfrak{p}_u \cap \mathfrak{m}$.

Выберем однопараметрическую подгруппу $\lambda\colon \mathbb{K}^\times \to T$ так что $\lambda(t) \in Z_{M_0}(L_0)$ и $\langle\lambda, \gamma\rangle < 0$ для всех $\gamma \in \Delta_{\mathfrak{p}_u\cap\mathfrak{m}}$.

Рассмотрим следующие группы. Пусть $\overline{M} := Z_G(\lambda)$, ее система корней равна $\Delta_{\overline{M}} = \{\gamma \in \Delta | \langle\gamma; \lambda\rangle = 0\}$. Группа $\overline{M}$ является подгруппой Леви в

$$\overline{Q} := \{g \in G | \text{ сеществует предел } \lim_{t\to 0} \lambda(t) g \lambda(t)^{-1} \text{ в } G\},$$

с алгеброй Ли

$$\overline{\mathfrak{q}} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\langle\alpha,\lambda\rangle\geqslant 0} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Унипотентный радикал $\overline{Q}$ и его алгебра Ли могут быть описаны как:

$$\overline{Q}_u = \{g \in G | \lim_{t\to 0} \lambda(t) g \lambda(t)^{-1} = e\}, \qquad \overline{\mathfrak{q}}_u = \bigoplus_{\langle\alpha,\lambda\rangle>0} \mathfrak{g}_\alpha.$$

В частности, имеем очевидные включения: $\overline{M} \supset L$ и $\overline{\mathfrak{q}}_u \supset \mathfrak{p}_u^- \cap \mathfrak{m}$.

Зафиксируем открытое P-инвариантное подмножество $X^\circ = P *_L Z$ в X, построенное с помощью теоремы о локальной структуре 1, примененной к некоторому эффективному B-дивизору со стабилизатором равным параболической подгруппе $P := P(X)$. Вспомним, что L_0 дейтствует на Z тривиально. Рассмотрим следующее открытое подмножество клетки Бялиницкого-Бируля:

$$Z_\lambda := \{x \in X| \ \lim_{t\to 0} \lambda(t)x \in Z\}.$$

Оно корректно определено, поскольку $\lambda(t)$ оставляет точки Z неподвижными. Определим отображение φ по формуле:

$$\varphi\colon Z_\lambda \to Z, \quad \varphi(x) = \lim_{t\to 0} \lambda(t)x.$$

Покажем, что $Z_\lambda \subset X^\circ$. Действительно если $\lim_{t\to 0} \lambda(t)x = z \in Z$, то λ-орбита точки x пересекает X°, а это множество является открытой инвариантной окрестностью z, и тем самым оно содержит все λ-орбиту точки x.

Лемма 4. *Для $x \in Z_\lambda$, $q \in \overline{Q}_u$ и $m \in \overline{M}$ имеем следующие равенства: $\varphi(qx) = \varphi(x)$ and $\varphi(mx) = m\varphi(x)$.*

Доказательство. Действительно для $q \in \overline{Q}_u$ по определению

$$\lim_{t\to 0} \lambda(t)q\lambda(t)^{-1} = e.$$

Таким образом,

$$\varphi(qx) = \lim_{t\to 0} \lambda(t)q\lambda(t)^{-1} \cdot \lim_{t\to 0} \lambda(t)x = \lim_{t\to 0} \lambda(t)x = \varphi(x),$$

$$\varphi(mx) = \lim_{t\to 0} \lambda(t)mx = m \lim_{t\to 0} \lambda(t)x = \varphi(x).$$

□

Предложение 3. *Для $z \in Z$ имеем $\varphi^{-1}(z) = (P_u \cap \overline{Q}_u)z$ и $Z_\lambda = (P_u \cap \overline{Q}_u)Z$.*

Доказательство. Как было замечено ранее $Z_\lambda \subset X^\circ$. Запишем действие λ на точке $x \in X^\circ$, которую представим в виде $x = p_u z$, где $p_u \in P_u$ и $z \in Z$. Поскольку действие λ тривиально на Z имеем

$$\lim_{t\to 0} \lambda(t)(p_u z) = \lim_{t\to 0} \lambda(t)p_u\lambda(t)^{-1}z.$$

Принимая во внимание то, что $\lambda(t)p_u\lambda(t)^{-1} \in P_u$ и тот факт, что действие P_u свободно на X° получаем, что предел

$$\lim_{t\to 0} \lambda(t)p_u\lambda(t)^{-1}z$$

существует если и только если существует предел $\lim_{t\to 0}\lambda(t)p_u\lambda(t)^{-1}$. Откуда $p_u\in\overline{Q}$.

Покажем, что $p_u\in\overline{Q}_u$. Используя разложение Леви $\overline{Q}=\overline{M}\ltimes\overline{Q}_u$ получаем разложение $P_u\cap\overline{Q}=P_u\cap\overline{M}\ltimes P_u\cap\overline{Q}_u$, и в частности $p_u=mq_u$ для $m\in P_u\cap\overline{M}$ и $q_u\in P_u\cap\overline{Q}_u$. Откуда

$$\lim_{t\to 0}\lambda(t)(p_uz)=m\lim_{t\to 0}\lambda(t)(q_uz)=mz.$$

Таким образом, включение $mz\in Z$ выполнено если и только если $m=e$, поскольку $m\in P_u$ и $X^\circ\cong P_u\times Z$. Это дает необходимое включение $p_u\in\overline{Q}_u$ и завершает доказательство. □

Рассмотрим $\overline{Q}_u$-орбиты точек из Z. Покажем, что эти орбиты содержатся в открытом подмножестве X°.

Лемма 5. *Для $z\in Z$ имеем $(P_u\cap\overline{Q}_u)z=\overline{Q}_uz$.*

Доказательство. По лемме 4 и предложению 3 имеем

$$\overline{Q}_uz\subseteq\varphi^{-1}(z)=(P_u\cap\overline{Q}_u)z.$$

Откуда следует лемма. □

Определим теперь группу $\overline{U}$. Рассмотрим группу $\overline{U}_{\overline{M}}=U\cap\overline{M}$. Положим $\overline{U}:=\overline{U}_{\overline{M}}\ltimes\overline{Q}_u\subset\overline{Q}$. Будучи прообразом максимальной унипотентной группы в $\overline{M}$ при морфизме $\overline{Q}\to\overline{Q}/\overline{Q}_u\cong\overline{M}$, группа $\overline{U}$ также является максимальной унипотентной в G.

Рассмотрим семейство орбит $\overline{U}z$ для $z\in Z$. Из леммы 5 мы получим, что $\overline{U}z=\overline{U}_{\overline{M}}(\overline{Q}_uz)=\overline{U}_{\overline{M}}(\overline{Q}_u\cap P_u)z\subset P_uz$. Откуда в частности орбиты $\overline{U}z$ содержатся в X°, а также $\overline{U}z_1\neq\overline{U}z_2$ для $z_1\neq z_2$ (поскольку $P_uz_1\cap P_uz_2=\varnothing$).

Лемма 6. *Орбита $\overline{U}z$ of $z\in Z$ нормализуется группой*

$$\overline{S}:=(L_0\ltimes(\overline{M}\cap P_u))\ltimes\overline{Q}_u\subset\overline{Q}.$$

Доказательство. Достаточно показать, что L_0 нормализует $\overline{U}z$. Но это следствие следующей цепочки равенств

$$L_0\overline{U}z=L_0(\overline{M}\cap P_u)\overline{Q}_uz=(\overline{M}\cap P_u)\overline{Q}_uL_0z=\overline{U}z,$$

где мы использовали, что $L_0\subset G_z$. □

Теперь мы готовы доказать часть (ii) теоремы 2. Мы приведем доказательство основанное на вычислении отображения моментов, созвучное с доказательством Кнопа [11]. Напомним определение конормального расслоения к слоению $\overline{U}$-орбит:

$$\mathcal{N}_X^*=\{\xi\in T_{X,x}^*|\ x\in\overline{U}Z,\quad\langle\overline{\mathfrak{u}}x,\xi\rangle=0\}.$$

Наша цель вычислить образ $\mathcal{N}_X^*$ при отображении моментов μ_X. Поскольку $\overline{S}$ нормализует орбиты $\overline{U}z$ (для $z\in Z$), имеем

$$\mathcal{N}_X^*=\{\xi\in T_X^*|\ x\in\overline{U}Z,\quad\langle\overline{\mathfrak{s}}x,\xi\rangle=0\},$$
$$\mu_X(\mathcal{N}_X^*)\subset\overline{\mathfrak{s}}^\perp=\mathfrak{a}+(\mathfrak{p}_u\cap\overline{\mathfrak{m}})+\overline{\mathfrak{q}}_u\supset\mathfrak{a}+(\mathfrak{p}_u^-\cap\mathfrak{m}).$$

Замечание 3. *По построению* $\overline{\mathfrak{q}}$ *имеем включение* $\overline{\mathfrak{q}}_u \supset (\mathfrak{p}_u^- \cap \mathfrak{m})$ *а также равенство* $\mathfrak{a} + (\mathfrak{p}_u^- \cap \mathfrak{m}) = \mathfrak{a} + (\mathfrak{p}_u \cap \overline{\mathfrak{m}} + \overline{\mathfrak{q}}_u) \cap \mathfrak{m}$.

Обозначим $\overline{P} := N_G(\overline{S})$. Имеем $\overline{\mathfrak{p}}_u = \mathfrak{p}_u \cap \overline{\mathfrak{m}} + \overline{\mathfrak{q}}_u$. Следующее предложение дает информацию об образе $\mu_X(\mathcal{N}^*_{X,z})$.

Предложение 4. *Пусть* $\mathcal{N}^*_{X,z}$ *— слой* $\mathcal{N}^*_X$ *над точкой* $z \in Z$. *Рассмотрим* T*-эквивариантную проекцию* $\mathfrak{a} + \overline{\mathfrak{p}}_u$ *на подпространство* $\mathfrak{a} + \overline{\mathfrak{q}}_u \cap \mathfrak{p}_u^-$ *со слоями параллельными подпространству* $\overline{\mathfrak{q}} \cap \mathfrak{p}_u$. *Тогда образ* $\mu_X(\mathcal{N}^*_{X,z})$ *при этой проекции равен* $\mathfrak{a} + \overline{\mathfrak{q}}_u \cap \mathfrak{p}_u^-$.

Доказательство. Рассмотрим T-эквивариантное разложение

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + (\overline{\mathfrak{q}}_u \cap \mathfrak{p}_u^- + \overline{\mathfrak{q}}_u^- \cap \mathfrak{p}_u) + \mathfrak{g}_0,$$

где $\mathfrak{g}_0$ — ортогонально остальным слагаемым. Ограниечение спаривания на $\overline{\mathfrak{q}}_u \cap \mathfrak{p}_u^- + \overline{\mathfrak{q}}_u^- \cap \mathfrak{p}_u$ невырождено, а подпространства $\overline{\mathfrak{q}}_u \cap \mathfrak{p}_u^-$, $\overline{\mathfrak{q}}_u^- \cap \mathfrak{p}_u$ являются изотропными. Более того $\overline{\mathfrak{q}} \cap \mathfrak{p}_u \subset \mathfrak{g}_0$, и элементы $\mathfrak{a} + (\overline{\mathfrak{q}}_u \cap \mathfrak{p}_u^-)$ отождествляются с линейными функциями на $\mathfrak{a} + (\overline{\mathfrak{q}}_u^- \cap \mathfrak{p}_u)$. Из включения

$$T_{X,z} \supset \overline{\mathfrak{u}}z \oplus (\mathfrak{a} + \overline{\mathfrak{q}}_u^- \cap \mathfrak{p}_u)z = (\overline{\mathfrak{q}} \cap \mathfrak{p}_u)z \oplus (\mathfrak{a} + \overline{\mathfrak{q}}_u^- \cap \mathfrak{p}_u)z,$$

мы видим, что любая линейная функция η на $\mathfrak{a} + (\overline{\mathfrak{q}}_u^- \cap \mathfrak{p}_u)$ может быть поднята до элемента $\xi \in T^*_{X,z}$ обращающего в нуль на $(\overline{\mathfrak{q}} \cap \mathfrak{p}_u)z = \overline{\mathfrak{u}}z$. Тем самым мы нашли $\xi \in \mathcal{N}^*_{X,z}$, такой что проекция $\mu_X(\xi)$ на $\mathfrak{a} + \overline{\mathfrak{q}}_u \cap \mathfrak{p}_u^-$ равна η, что доказывает предложение. □

Замечание 4. *Рассмотрим некоторую точку* $z \in Z$. *Однопараметрическая группа* λ *действует на* $T_{X,z}$ *поскольку* λ *стабилизирует* z. *В доказательстве предложения 4 мы построили подпространство* $V_z \subset \mathcal{N}^*_{X,z}$, *такое что* $\mu_X(V_z)$ *изоморфно отображается в* $\mathfrak{a} + \overline{\mathfrak{q}}_u \cap \mathfrak{p}_u^-$ *при* T*-эквивариантной проекции. Заметим, что разложение*

$$T_{X,z} = (\overline{\mathfrak{q}} \cap \mathfrak{p}_u)z \oplus (\mathfrak{a} + \overline{\mathfrak{q}}_u^- \cap \mathfrak{p}_u)z \oplus R$$

может быть выбрано λ*-эквивариантным. Что показывает, что* V_z *можно выбрать* λ*-инвариантным.*

Предложение 5. *Имеем следующее равенство*

$$\overline{\mu_X(\mathcal{N}^*_X)} = \mathfrak{a} + \overline{\mathfrak{p}}_u = \mathfrak{a} + \mathfrak{p}_u \cap \overline{\mathfrak{m}} + \overline{\mathfrak{q}}_u.$$

Доказательство. Посколкьку $\overline{P}$ нормализует слоение $\overline{U}$-орбит оно также нормализует и $\mathcal{N}^*_X$. Таким образом, чтобы доказать предложение достаточно показать, что $\overline{P}\mu_X(\mathcal{N}^*_{X,z})$ плотно в $\overline{\mathfrak{s}}^\perp = \mathfrak{a} + \overline{\mathfrak{p}}_u$. Для этого воспользуемся следующей леммой.

Лемма 7. *Рассмотрим действие $P_u \cap \overline{Q}$ на $\mathfrak{a} + \overline{\mathfrak{p}}_u$. Пусть $\xi \in \mathfrak{a} + \overline{\mathfrak{p}}_u$ — точка общего положения. Тогда стабилизатор ξ в $P_u \cap \overline{Q}$ тривиален. Более того, если $\xi \in \mathfrak{a}^{pr} + \mathfrak{p}_u \cap \overline{\mathfrak{q}}$, то $(P_u \cap \overline{Q})\xi = \xi + \mathfrak{p}_u \cap \overline{\mathfrak{q}}$.*

Доказательство. Первое утверждение легко следует из второго. Возьмем $\xi \in \mathfrak{a}^{pr}$. Имеем включение $(P_u \cap \overline{Q})\xi \subset \xi + \mathfrak{p}_u \cap \overline{\mathfrak{q}}$ (оно следует из равенства $P_u \cap \overline{Q} = \exp(\mathfrak{p}_u \cap \overline{\mathfrak{q}})$ и включения $[\xi, \mathfrak{p}_u \cap \overline{\mathfrak{q}}] \subset \mathfrak{p}_u \cap \overline{\mathfrak{q}}$). Из $\mathfrak{p}_u \cap \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\xi) = \mathfrak{p}_u \cap \mathfrak{m} \subset \overline{\mathfrak{q}}_u^-$ получим, что стабилизатор ξ в $P_u \cap \overline{Q}$ тривиален и имеет место равенство $[\xi, \mathfrak{p}_u \cap$ $\cap \overline{\mathfrak{q}}] = \mathfrak{p}_u \cap \overline{\mathfrak{q}}$. Откуда получаем, что касательное пространство к орбите $(P_u \cap \overline{Q})\xi$ в точке ξ равно $\mathfrak{p}_u \cap \overline{\mathfrak{q}}$. Таким образом, $(P_u \cap \overline{Q})\xi$ плотно в $\xi + \mathfrak{p}_u \cap \overline{\mathfrak{q}}$. Поскольку любая орбита унипотентной группы в аффинном многообразии замкнута имеем $(P_u \cap \overline{Q})\xi = \xi + \mathfrak{p}_u \cap \overline{\mathfrak{q}}$. □

По предложению 4, существует $\xi = \xi_0 + \xi_+ \in \mu_X(\mathcal{N}^*_{X,z})$, где $\xi_0 \in \mathfrak{a}^{pr}$ и $\xi_+ \in$ $\in \mathfrak{p}_u \cap \overline{\mathfrak{q}}$. Из леммы 7 следует, что стабилизатор ξ в $\mathfrak{p}_u \cap \overline{\mathfrak{q}}$ тривиален и $[\mathfrak{p}_u \cap \overline{\mathfrak{q}}, \xi] =$ $= \mathfrak{p}_u \cap \overline{\mathfrak{q}}$. Поскольку проекция $\mu_X(\mathcal{N}^*_{X,z})$ на подпространство $\mathfrak{a} + \mathfrak{p}_u^- \cap \overline{\mathfrak{q}}_u$ сюрьектина, получаем $\mu_X(\mathcal{N}^*_{X,z}) + \mathfrak{p}_u \cap \overline{\mathfrak{q}} = \overline{\mathfrak{s}}^\perp$. Вычисляя дифференциал отображения $(P_u \cap \overline{Q}) \times \mu_X(\mathcal{N}^*_{X,z}) \to (P_u \cap \overline{Q})\mu_X(\mathcal{N}^*_{X,z})$ в точке ξ получаем

$$(\mathfrak{p}_u \cap \overline{\mathfrak{q}}) \times \mu_X(\mathcal{N}^*_{X,z}) \to [\mathfrak{p}_u \cap \overline{\mathfrak{q}}, \xi] + \mu_X(\mathcal{N}^*_{X,z}) = \overline{\mathfrak{s}}^\perp.$$

Откуда $(P_u \cap \overline{Q})\mu_X(\mathcal{N}^*_{X,z})$ плотно $\overline{\mathfrak{s}}^\perp$, что доказывает предложение. □
Теорема 2 (ii) теперь следует из следующего предложения.

Предложение 6. *Подмножество $\overline{P}_u^- \mathcal{N}^*_X$ плотно T^*_X.*

Доказательство. Рассматривая дифференциал отображения $\overline{P}_u^- \times \mathcal{N}^*_X \to$ $\to \overline{P}_u^- \mathcal{N}^*_X$ мы видим, что достаточно показать, что для некоторого $\alpha \in \mathcal{N}^*_X$ касательное пространство к T^*_X в точке α равно сумме подпространство $\overline{\mathfrak{p}}_u^- \alpha$ и касательного пространства к $\mathcal{N}^*_X$. Возьмем α, такое что $\xi = \mu_X(\alpha) \in \mathfrak{a} + \overline{\mathfrak{p}}_u$ достаточно общая точка. Из предложения 2 следует, что $d\mu_X$ отображается изоморфно $\overline{\mathfrak{p}}_u^- \alpha$ на $[\overline{\mathfrak{p}}_u^-, \xi] \cong \overline{\mathfrak{p}}_u^-$, а также то, что $[\overline{\mathfrak{p}}_u^-, \xi]$ трансверсально $\mathfrak{a} + \overline{\mathfrak{p}}_u = \overline{\mu_X(\mathcal{N}^*_X)}$ в точке ξ. Откуда $\overline{\mathfrak{p}}_u^- \alpha$ трансверсально $\mathcal{N}^*_X$ в точке α. Из трансверсальности $\overline{\mathfrak{p}}_u^- \alpha$ и $\mathcal{N}^*_X$ и равенства $\operatorname{codim}_{T^*_X} \mathcal{N}^*_X = \dim P_u = \dim \overline{P}_u$ следует наше предложение. □
Доказательство предложения завершает доказательство теоремы 2. □

Следующий результат Кнопа является следствием теоремы 2.

Следствие 1. *([9], Thm. 5.4) Замыкание образа отображения моментов может быть описано как $\overline{\mu_X(T^*_X)} = G(\mathfrak{a} + \overline{\mathfrak{p}}_u) = G(\mathfrak{a} + \mathfrak{p}_u^-)$.*

Доказательство. Имеем $\overline{\mu_X(T^*_X)} = \overline{G\mu_X(\mathcal{N}^*_X)} = G(\mathfrak{a} + \overline{\mathfrak{p}}_u)$. Равенство $G(\mathfrak{a} + \overline{\mathfrak{p}}_u) = G(\mathfrak{a} + \mathfrak{p}_u^-)$ следует из леммы 2 и равенства $(\overline{\mathfrak{p}}_u \cap \mathfrak{m}) = (\mathfrak{p}_u^- \cap \mathfrak{m})$. □

Следующая теорема описывает нормализатор $\overline{U}$-орбит из семейства, параметризованного Z.

Теорема 3. *Нормализатор орбиты* $\overline{U}z$ *для* $z \in Z$ *равен* $\overline{S}$. *Равенство* $g\overline{U}z = \overline{U}z'$ *для некоторых* $z, z' \in Z$ *выполнент* $g \in \overline{P}$ *(где* $\overline{P} = N_G(\overline{S})$*). Отображение* $G *_{\overline{P}} \mathcal{N}_X^* \to T_X^*$ *доминантно и конечно в общей точке.*

Доказательство. Мы докажем теорему только для точек общего положения в Z (полное доказательство см. [21]).

Для $z \in Z$ пусть $\widetilde{S}$ — нормализатор $\overline{U}z$. Группа $N_G(\widetilde{S})$ — параболическая подгруппа в G, поскольку она также содержит $N_G(\overline{U}) = \overline{B}$, которая является борелевской подгруппой, содержащей $\overline{U}$; в частности $T \subset N_G(\widetilde{S})$. Так как $Z \cap \overline{U}z = z$, имеем $N_G(\widetilde{S}) \cap T = T_z = L_0 \cap T$. Поскольку число орисферических подгрупп, нормализуемых T и таких, что $\widetilde{S} \cap T = T_0$ конечно, для общей точки Z нормализатор $\overline{U}z$ равен некоторой фиксированной орисферической подгруппе $\widetilde{S}$.

Далее можно определить нормализатор $\widetilde{P}$ семейства орбит $\overline{U}z$, где $z \in Z'$, то есть группу, состоящую из $p \in \widetilde{P}$, такую что для $z_1 \in Z'$ существует $z_2 \in Z'$, такое что $p\overline{U}z_1 = \overline{U}z_2$.

Поскольку $\widetilde{P}$ нормализует семейство орбит $\overline{U}z$, она также нормализует конормальное расслоение к этому слоению $\mathcal{N}_X^*$. Таким образом, отображение

$$G *_{\widetilde{P}} \mathcal{N}_X^* \to G\mathcal{N}_X^* \subset T^*X$$

корректно определено и доминантно. Произведем вычисление размерностей:

$$\dim \mathcal{N}_X^* = \dim Z + \dim \overline{U}z + \operatorname{codim}_X \overline{U}z = \dim T_X^* - \dim P_u$$

$$\dim \widetilde{P} \geqslant \dim \overline{P} = \dim L + \dim P_u \cap M + \dim \overline{Q}_u = \dim P$$

$$\dim G *_{\widetilde{P}} \mathcal{N}_X^* = \dim G/\widetilde{P} + \dim \mathcal{N}_X^* \leqslant \dim T_X^*.$$

Интересующее нас отображение может быть доминантно только если

$$\dim G *_{\widetilde{P}} \mathcal{N}_X^* = \dim T^*X,$$

что происходит только если $\widetilde{P} = \overline{P}$, а отображение $G *_{\overline{P}} \mathcal{N}_X^* \to T_X^*$ конечно в общей точке. □

5. Орисферическое кокасательное расслоение

В этой части мы определим многообразие вырожденных орисфер $\mathcal{H}or$. Нашей целью будет показать, что конормальное расслоение с семейству вырожденных орисфер бирационально отображается в $\mathcal{H}or$. Это обобщение теоремы, доказанной Винбергом в [19, Sec. 5, Thm. 3].

Рассмотрим G-разнесение орисфер из слоения, построенного в теореме 2. По теореме 3 мы можем отождествить это множество с многообразием

$$\mathcal{H}or := G *_{\overline{P}} Z,$$

где $\overline{P}$ действует на Z посредством фактора $A = \overline{P}/\overline{P}_0$. Поскольку $\dim P = \dim \overline{P}$ имеем $\dim \mathcal{H}or = \dim X$. Определим следующее многообразие инцидентности:

$$\mathcal{U} := \{(x, [\mathcal{H}]) \in X \times \mathcal{H}or |\ x \in \mathcal{H}\}.$$

Заметим, что точка общего положения в X содержится в некоторой орисфере $[\mathcal{H}] \in \mathcal{H}or$ (поскольку GZ плотно в X). Таким образом, проекция $p_X : \mathcal{U} \to X$ доминантна. Многообразие $\mathcal{U}$ может быть отождествлено с подмногообразием $G *_{\overline{P}} \mathcal{U}_0$ в $G *_{\overline{P}} (X \times Z)$ (здесь $\overline{P}$ действует диагонально на $X \times Z$ посредством стандартного действия на X и действием фактора $\overline{P}/\overline{S}$ на Z), где

$$\mathcal{U}_0 = \{(x, z) \in X \times Z |\ x \in \overline{U}z\}.$$

Заметим, что Z вкладывается в качестве диагонали в $\mathcal{U}_0$.

Для этого многообразия инцидентности, следуя Винбергу, можно определить конормальное расслоение, обозначенное HT^*_X (подробное изложение можно найти в [19, Sec. 4], [18, Sec. 2]).

Многообразие HT^*_X можно отождествить с многообразием троек $(x, \xi, [\mathcal{H}])$, таких что

$$x \in \mathcal{H}, \quad \xi \in T^*_{X,x}, \quad \xi = 0 \text{ on } T_{\mathcal{H},x}.$$

Из теоремы 3 мы также находим, что HT^*_X отождествляется с $G *_{\overline{P}} \mathcal{N}^*_X$.

Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} T^*_X \arrow[d] & HT^*_X \arrow[l, "\widehat{p}_X"'] \arrow[r, "\widehat{p}_{\mathcal{H}or}"] \arrow[d] & T^*_{\mathcal{H}or} \arrow[d] \\ X & \mathcal{U} \arrow[l, "p_X"'] \arrow[r, "p_{\mathcal{H}or}"] & \mathcal{H}or \end{tikzcd}$$

Теорема 3 может быть переформулирована в следующем виде:

Теорема 4. *Морфизм $HT^*_X \xrightarrow{\widehat{p}_X} T^*_X$ является доминантным и конечным в общей точке.*

Мы готовы теперь доказать следующее обобщение результата Винберга [19, Thm. 3].

Теорема 5. *Морфизм $HT^*_X \xrightarrow{\widehat{p}_{\mathcal{H}or}} T^*_{\mathcal{H}or}$ является бирафциональным.*

Доказательство. Поскольку $T^*_{\mathcal{H}or}$ — векторное расслоение над $\mathcal{H}or$, а HT^*_X отображается доминантно на $\mathcal{H}or$ достаточно доказать бирациональность морфизма послойно. Пусть $[\mathcal{H}] \in \mathcal{H}or$, тогда слой HT^*_X над $[\mathcal{H}]$ отождествляется с $N^*_{X/\mathcal{H}}$ — конормальным расслоением к $\mathcal{H} \subset X$. Мы покажем, что образ $N^*_{X/\mathcal{H}}$ при морфизме $\widehat{p}_{\mathcal{H}or}$ содержит открытое подмножество в $T^*_{\mathcal{H}or,[\mathcal{H}]}$. Поскольку все интересующие нас отображения G-эквивариантны можно считать, что $[\mathcal{H}] \in Z$, то есть $\mathcal{H} = (P_u \cap \overline{Q})x$ для некоторой точки $x \in Z$. Заметим, что действие

$P_u \cap \overline{Q}$ на $N^*_{X/\mathcal{H}}$ — свободно, а слой $\mathcal{N}^*_{X,x}$ конормального расслоения к $\mathcal{H}$ в некоторой точке $x \in \mathcal{H}$ определяет сечение этого действия. Без ограничения общности можно уменьшить Z и получить подмножество изоморфное $A \times C$, то есть мы можем считать, что $x \in C$. Согласно [19, Sec. 4] морфизм $\widehat{p}_{\mathcal{H}or}$ отображает слой $\mathcal{N}^*_{X,x}$ изоморфно на подпространство $N^*_{\mathcal{H}or/\mathcal{H}or_x,[\mathcal{H}]} \subset T^*_{\mathcal{H}or,[\mathcal{H}]}$, где $\mathcal{H}or_x = p_X^{-1}(x)$ — множество орисфер, содержащих x, а $N^*_{\mathcal{H}or/\mathcal{H}or_x,[\mathcal{H}]}$ — слой над $[\mathcal{H}]$ конормального расслоения к $\mathcal{H}or_x$ в многообразии $\mathcal{H}or$. Поскольку проекции $p_{\mathcal{H}or}$ и p_X обе сюръективны и размерность общего слоя $p_{\mathcal{H}or}$ равна $\dim(\mathfrak{p}_u \cap \overline{\mathfrak{q}})$, имеем $\dim \mathcal{H}or_x = \dim(\mathfrak{p}_u \cap \overline{\mathfrak{q}})$. Из вышесказанного очевидно, что бирациональность морфизма $\widehat{p}_{\mathcal{H}or}$ следует из следующего предложения:

Предложение 7. *Действие $P_u \cap \overline{Q}$ на $T^*_{\mathcal{H}or,[\mathcal{H}]}$ свободно для точки общего положения. Подпространство $N^*_{\mathcal{H}or/\mathcal{H}or_x,[\mathcal{H}]}$ пересекает общую $P_u \cap \overline{Q}$-орбиту из $T^*_{\mathcal{H}or,[\mathcal{H}]}$ трансверсально в единственной точке.*

Замечание 5. *Действие $P_u \cap \overline{Q}$ на $T^*_{\mathcal{H}or,[\mathcal{H}]}$ определено, поскольку $P_u \cap \overline{Q}$ оставляет на месте $[\mathcal{H}]$.*

Доказательство. Заметим, что касательное пространство $T_{\mathcal{H}or,[\mathcal{H}]}$ отождествляется с $\mathfrak{g}/\overline{\mathfrak{s}} \oplus T_{C,x}$, а слой кокасательного расслоения $T^*_{\mathcal{H}or,[\mathcal{H}]}$ изоморфен

$$\overline{\mathfrak{s}}^{\perp} \oplus T^*_{C,x} \cong (\mathfrak{a} + \mathfrak{p}_u \cap \overline{\mathfrak{m}} + \overline{\mathfrak{q}}_u) \oplus T^*_{C,x}.$$

Из этого описания мы видим, что наш вопрос сводится к исследованию $P_u \cap \overline{Q}$-орбит в $\overline{\mathfrak{s}}^{\perp}$. Лемма 7 завершает доказательство первой части предложения.

Рассмотрим подмногообразие $\mathcal{H}or_{tr} := (P_u \cap \overline{Q}_u^-) \times Z$ в многообразии орисфер $\mathcal{H}or$. Это подмногообразие параметризует семейство орисфер $\mathcal{U}|_{\mathcal{H}or_{tr}} = p^{-1}_{\mathcal{H}or}(\mathcal{H}or_{tr})$, которое отображается изоморфно на X_0 под действием p_X. Действительно, этот образ состоит из сдвигов орбит вида $(P_u \cap \overline{Q})z$ для $z \in Z$ на элементы из $P_u \cap \overline{Q}_u^-$. Более того, поскольку действие P_u свободно, имеем равенство $(P_u \cap \overline{Q}_u^-)(P_u \cap \overline{Q}) = P_u$ (см. [7, Prop. 28.7]), из которого следует, что образы орбит при таких сдвигах не пересекаются. Следовательно это семейство отображается изоморфно на открытое подмножество $(P_u \cap \overline{Q}_u^-)(P_u \cap \overline{Q})Z = P_u Z = X^\circ$. Из того, что Z вкладывется диагонально в $\mathcal{U} \subset G *_{\overline{P}} (X \times Z)$, мы получаем, что $p^{-1}_{\mathcal{H}or}(\mathcal{H}or_{tr}) = P_u Z$.

Лемма 8. *Для $x \in Z$ подмногообразия $\mathcal{H}or_{tr}$ и $\mathcal{H}or_x$ в многообразии $\mathcal{H}or$ пересекаются трансверсально в точке $\mathcal{H}$, соответствующей орисфере $\overline{U}x$. В точке $\mathcal{H} \in \mathcal{H}or$ имеем следующее равенство:*

$$T_{\mathcal{H}or,[\mathcal{H}]} = T_{\mathcal{H}or_x,[\mathcal{H}]} \oplus T_{\mathcal{H}or_{tr},[\mathcal{H}]}. \qquad (*)$$

Доказательство. Заметим, что многообразия $X, \mathcal{H}or, \mathcal{U}$ можно считать гладкими, а морфизмы $p_X, p_{\mathcal{H}or}$ субмерсивными. Также заметим, что орисферы параметризованные $\mathcal{H}or_{tr}$ друг друга не пересекают и покрывают открытое подмножество X°. Отсюда получаем, что $p_{\mathcal{H}or}^{-1}(\mathcal{H}or_{tr})$ отображается изоморфно на X° при проекции p_X. Поскольку p_X субмерсивен, $p_{\mathcal{H}or}^{-1}(\mathcal{H}or_{tr})$ также пересекает слой $\mathcal{H}or_x = p_X^{-1}(x)$ для точки $x \in X^\circ$ трансверсально в точности по единственной точке. Поскольку каждый слой $\mathcal{H}or_x$ отображается инъективно в $\mathcal{H}or$ посредством $p_{\mathcal{H}or}$, получаем трансверсальность $\mathcal{H}or_{tr}$ и $\mathcal{H}or_x$ в точке $\mathcal{H}or$. Многообразия $p_{\mathcal{H}or}^{-1}(\mathcal{H}or_{tr})$ и $\mathcal{H}or_x$ имеют дополнительные размерности в $\mathcal{U}$, таким образом, $\mathcal{H}or_{tr}$ и $\mathcal{H}or_x$ имеют дополнительные размерности в $\mathcal{H}or$, что влечет $(*)$. □

Лемма 9. *$T_{\mathcal{H}or_{tr},[\mathcal{H}]}$ канонически отождествляется с $\mathfrak{p}_u \cap \overline{\mathfrak{q}}_u^- \oplus T_{Z,x} \subset \mathfrak{g}/\overline{\mathfrak{s}} \oplus T_{C,x}$ а слой конормального расслоения $N^*_{\mathcal{H}or/\mathcal{H}or_{tr},[\mathcal{H}]}$ отождествляется с $\mathfrak{p}_u \cap \overline{\mathfrak{q}} \subset \overline{\mathfrak{s}}^\perp \oplus T_{C,x}$.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Поскольку $T_{\mathcal{H}or_{tr},[\mathcal{H}]} \cong \mathfrak{p}_u \cap \overline{\mathfrak{q}}_u^- \oplus T_{Z,x} \subset \mathfrak{g}/\overline{\mathfrak{s}} \oplus T_{C,x}$, векторное пространство $N^*_{\mathcal{H}or/\mathcal{H}or_{tr},[\mathcal{H}]}$ отождествляется с подпространством $\mathfrak{p}_u \cap \overline{\mathfrak{q}} \subset \overline{\mathfrak{s}}^\perp$, которое состоит из линейных функций на $\mathfrak{g}/\overline{\mathfrak{s}}$ обращающихся в нуль на $\mathfrak{p}_u \cap \overline{\mathfrak{q}}_u^-$. □

Двойственное равенство к $(*)$ дает:

$$T^*_{\mathcal{H}or,[\mathcal{H}]} = N^*_{\mathcal{H}or/\mathcal{H}or_x,[\mathcal{H}]} \oplus N^*_{\mathcal{H}or/\mathcal{H}or_{tr},[\mathcal{H}]} = N^*_{\mathcal{H}or/\mathcal{H}or_x,[\mathcal{H}]} \oplus (\mathfrak{p}_u \cap \overline{\mathfrak{q}}). \qquad (**)$$

Доказательство теоремы 5 будет завершено после доказательства следующего предложения.

Предложение 8. *Пересечение $N^*_{\mathcal{H}or/\mathcal{H}or_x,[\mathcal{H}]}$ и общей $P_u \cap \overline{Q}$-орбитой из $\overline{\mathfrak{s}}^\perp \oplus T^*_{C,x}$ состоит из одной точки.*

Доказательство.

Мы опустим доказательство этого предложения поскольку оно стандартно, но несколько технично. В нем используется экспоненциальное отображение и исследуются веса тора T. Полное доказательство читатель найдет в [21]. □

Для дальнейшего нам понадобится следующее следствие предложения 8, которое также можно найти в [21].

Предложение 9. *Пусть $\mathcal{N}^*_{X,z}$ — слой конормального расслоения к слоению вырожденных орисфер в точке $z \in Z$ и пусть $V_z \subseteq \mathcal{N}^*_{X,z}$ — λ-инвариантное подпространство, такое что $\mu_X(V_z)$ отображается изоморфно на $\mathfrak{a} + \mathfrak{p}_u^- \cap \overline{\mathfrak{q}}_u$ при T-эквивариантной проекции на это подпространство. Тогда пересечение $\mu_X(V_z)$ и общей орбиты $P_u \cap \overline{Q}$-из $\overline{\mathfrak{s}}^\perp$ состоит из одной точки.*

Теорема 5 доказана. □

6. Малая группа Вейля

Согласно теореме 3 морфизм $G *_{\overline{P}} \mathcal{N}_X^* \to T_X^*$ является доминантным и конечным в общей точке, на самом деле он также является рациональным накрытием Галуа, что будет показано в теореме 6. Наша цель показать, что группа Галуа этого накорытия является малой группой Вейля многообразия X, которая была введена Кнопом в [9].

Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму.

$$\begin{tikzcd} G *_{\overline{P}} \mathcal{N}_X^* \arrow[r, "\mu_{\mathcal{N}^*}"] \arrow[d] & G *_{\overline{P}} (\mathfrak{a} + \overline{\mathfrak{p}}_u) \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{a} \arrow[d] \\ T_X^* \arrow[r, "\mu_X"] & G(\mathfrak{a} + \overline{\mathfrak{p}}_u) \arrow[r] & \mathfrak{t}/W \end{tikzcd}$$

В ней правая вертикальная стрелка является рациональным фактором по действию группы G. Нижняя правая — композиция категорного фактора по действию группы G и изоморфизма Шевалле $\mathfrak{g}/\!\!/G = \mathfrak{t}/W$. Центральная вертикальная стрелка $g * \xi \mapsto g\xi$. Отображение $\mu_{\mathcal{N}^*}$ определено по формуле $g * \xi \mapsto$ $\mapsto g * \mu_X(\xi)$. Оно корректоно определено, поскольку μ_X — G-эквивариантно и в частности $\overline{P}$-эквивариантно.

Малая группа Вейля может быть определена следующим образом (см. [11, 9]). Рассмотрим расслоенное произведение $T_X^* \times_{\mathfrak{t}/W} \mathfrak{a}$. В общем случае оно приводимо. Существует естественное включение $\mathcal{N}_X^*$ в $T_X^* \times_{\mathfrak{t}/W} \mathfrak{a}$, которое является произведением вложения в T_X^* и отображения, которое отправляет $\eta \in \mathcal{N}_X^*$ в ортогональную проекцию $\mu_X(\eta)$ на $\mathfrak{a}$. Обозначим через $\widehat{T_X^*}$ неприводимую компонету многообразия $T_X^* \times_{\mathfrak{t}/W} \mathfrak{a}$, содержащую образ $\mathcal{N}_X^*$ (это компонента оказывается единственна [13, Lemma 6.7]). Определим действие группы Вейля $N_G(\mathfrak{a})/Z_G(\mathfrak{a})$ на $T_X^* \times_{\mathfrak{t}/W} \mathfrak{a}$ посредством стандартного действия на правом множителе.

Определение 3. *Максимальная подгруппа W_X в группе $N_G(\mathfrak{a})/Z_G(\mathfrak{a})$, которая сохраняет компоненту $\widehat{T_X^*}$ называется малой группой Вейля многообразия X.*

Наша цель доказать следующую теорему:

Теорема 6. *Отображение $G *_{\overline{P}} \mathcal{N}_X^* \to T_X^*$ является рациональным накрытием Галуа с группой W_X.*

Для доказательства теоремы 6 нам понадобится понятие нормализованного отображения моментов $\widetilde{\mu}_X \colon T_X^* \to M_X$ также введенного Кнопом в [9]. Оно может быть определено посредством применения разложения Штейна $T_X^* \to$ $\to M_X \to G(\mathfrak{a} + \mathfrak{p}_u^-)$ к отображению моментов μ_X. Другими словами возьмем в качестве M_X нормализацию $G(\mathfrak{a}+\mathfrak{p}_u^-)$ в поле рациональных функций многообразия T_X^*. Напомним, что для орисферического многообразия G/P_0^- многообразие $G*_{P^-}(\mathfrak{a}+\mathfrak{p}_u^-)$ является G-бирациональной моделью для M_{G/P_0^-}(см. [9, §4]).

Следующая лемма описывает различные бирациональные G-модели для M_{G/P_0^-}.

Лемма 10. *Многообразия $G*_{P^-}(\mathfrak{a}+\mathfrak{p}_u^-)$ и $G*_{\overline{P}}(\mathfrak{a}+\overline{\mathfrak{p}}_u)$ бирационально изоморфны $G*_M(\mathfrak{a}+M*_{M\cap P^-}(\mathfrak{p}_u^-\cap\mathfrak{m}))$ как G-многообразия.*

Доказательство ее мы опустим, поскольку оно стандартно (см.[21]).

Предложение 10. *Общие слои морфизмов $\mu_X\colon \mathcal{N}_X^*\to\mathfrak{a}+\overline{\mathfrak{p}}_u$ и $\mu_{\mathcal{N}^*}\colon G*_{\overline{P}}\mathcal{N}_X^*\to G*_{\overline{P}}(\mathfrak{a}+\overline{\mathfrak{p}}_u)$ неприводимы.*

Доказательство. Нам понадобится следующая стандартная лемма из алгебраической геометрии.

Лемма 11. *Пусть X — нормальное многообразие и пусть $f\colon X\to Y$ — доминантный морфизм. Предположим, что существует рациональное сечение морфизма f, т.е. такое $\sigma\colon Y\dashrightarrow X$, что $f\circ\sigma=id_Y$. Тогда общий слой f неприводим.*

Чтобы показать неприводимость общего слоя $\mu_X|_{\mathcal{N}_X^*}$, по лемме 11 достаточно построить рациональное сечение $\mathfrak{a}+\overline{\mathfrak{p}}_u\dashrightarrow\mathcal{N}_X^*$ морфизма $\mu_X|_{\mathcal{N}_X^*}:\mathcal{N}_X^*\to\mathfrak{a}+\overline{\mathfrak{p}}_u$. Заметим, что по предложению 4 и замечанию 4 существует подпространство $V_z\subset\mathcal{N}_{X,z}^*$, такое что $\mu_X(V_z)$ изоморфно V_z и $\mu_X(V_z)$ изоморфно проецируется на $\mathfrak{a}+\mathfrak{p}_u^-\cap\overline{\mathfrak{q}}_u$ при T-эквивариантной проекции из $\bar{\mathfrak{s}}^\perp$ на $\mathfrak{a}+\mathfrak{p}_u^-\cap\overline{\mathfrak{q}}_u$ со слоями параллельными подпространству $\mathfrak{p}_u\cap\overline{\mathfrak{q}}$. По предложению 9 отображение $(P_u\cap\overline{Q})\times\mu_X(V_z)\to\mathfrak{a}+\overline{\mathfrak{p}}_u$ бирационально. Поскольку отображение $(P_u\cap\overline{Q})\times V_z\to(P_u\cap\overline{Q})V_z\subset\mathcal{N}_X^*$ является изоморфизмом на свой образ из G-эквивариантности μ_X следует, что многообразие $(P_u\cap\overline{Q})V_z$ определяет рациональное сечение $\mu_X\colon\mathcal{N}_X^*\to\mathfrak{a}+\overline{\mathfrak{p}}_u$. Поскольку морфизм $\mu_{\mathcal{N}^*}$ G-эквивариантен общие слои также неприводимы. □

Обозначим через Θ неприводимую компоненту $\mu_X^{-1}(\mathfrak{a}^{pr}+(\mathfrak{p}_u^-\cap\mathfrak{m}))\cap\mathcal{N}_X^*$, которая отображается доминантно на $\mathfrak{a}+(\mathfrak{p}_u^-\cap\mathfrak{m})$ (она единственна по предложению 10). Рассмотрим $\Sigma=M\Theta$, это компонента $\mu_X^{-1}(\mathfrak{a}^{pr}+M(\mathfrak{p}_u^-\cap\mathfrak{m}))$ которая отображается доминантно на $\mathfrak{a}+M(\mathfrak{p}_u^-\cap\mathfrak{m})$ и пересекает $\mathcal{N}_X^*$. Поскольку $G(\mathfrak{a}^{pr}+M(\mathfrak{p}_u^-\cap\mathfrak{m}))$ плотно в $\mu_X(T_X^*)$ мы получаем, что $G\Sigma$ плотно в T_X^*. Пусть $\xi\in\mathfrak{a}^{pr}+M(\mathfrak{p}_u^-\cap\mathfrak{m})$. Если $\mathrm{Ad}(g)\xi\in(\mathfrak{a}^{pr}+M(\mathfrak{p}_u^-\cap\mathfrak{m}))$ для некоторого $g\in G$, то из единственности разложения Жордана мы получаем, что полупростые части ξ и $\mathrm{Ad}(g)\xi$ сопряжены с помощью g и обе лежат в $\mathfrak{a}^{pr}$. Таким образом множество $\{g\in G\mid g\Sigma\cap\Sigma\neq\emptyset\}$ содержится в конечном объединении смежных классов группы M в $N_G(\mathfrak{a})$. Согласно [19, Lemma 2] морфизм $G*_M\Sigma\to T_X^*$ является рациональным накрытием Галуа с группой N_X/M, где

$$N_X:=\{g\in N_G(\mathfrak{a})\mid g\overline{\Sigma}=\overline{\Sigma}\},$$

а действие N_X/M определяется как $nM \circ [g * z] = [gn^{-1} * nz]$ для $n \in N_X$.

Теорема 7. *Многообразия T^*_X и M_X G-бирационально изоморфны $G*_{N_X}\Sigma$ и $G*_{N_X}(\mathfrak{a}^{pr}+M*_{P^-\cap M}(\mathfrak{p}_u^-\cap\mathfrak{m}))$ соответственно. Отображение $\Phi : M*_{P^-\cap M}\Theta \to$ $\to \Sigma$, определенное как $\Phi(m * \eta) = m\eta$ для $m \in M$ и $\eta \in \Theta$ является бирациональным изоморфизмом, и при этом бирациональном изоморфизме нормализованное отображение моментов $\widetilde{\mu}_X : T^*_X \to M_X$ может быть описано на некотором открытом подмножестве по формуле $\widetilde{\mu}_X([g*\eta]) = [g*\mu_{\mathcal{N}^*}(\Phi^{-1}(\eta))]$.*

Доказательство. Чтобы показать бирациональность Φ достаточно показать, что он является изоморфизмом на открытом подмножестве $(P_u \cap M) \times \Theta$ in $M *_{P^-\cap M} \Theta$. Заметим, что проекция $\mathcal{N}^*_X$ на X равна $(P_u \cap \overline{Q})Z$, а также $\overline{Q}\cap(P_u\cap M) = \{e\}$. Таким образом, мы имеем изоморфизм $(P_u\cap M)(P_u\cap\overline{Q})Z \cong (P_u\cap M)\times(P_u\cap\overline{Q})Z$, который влечет $(P_u\cap M)\mathcal{N}^*_X \cong (P_u\cap M)\times\mathcal{N}^*_X$. В частности, $(P_u \cap M)\Theta \cong (P_u \cap M) \times \Theta$.

Имеем M-эквивариантное рациональное отображение

$$\mu_{\mathcal{N}^*} \circ \Phi^{-1} \colon \Sigma \dashrightarrow M *_{P^-\cap M} (\mathfrak{a}^{pr} + (\mathfrak{p}_u^- \cap \mathfrak{m})),$$

индуцирующее отображение

$$\widetilde{\mu}'_X \colon G *_{N_X} \Sigma \dashrightarrow G *_{N_X} (\mathfrak{a}^{pr} + M *_{P^-\cap M} (\mathfrak{p}_u^- \cap \mathfrak{m})),$$

через которое пропускается отображение моментов μ_X. Чтобы показать, что M_X бирационально

$$G *_{N_X} (\mathfrak{a}^{pr} + M *_{P^-\cap M} (\mathfrak{p}_u^- \cap \mathfrak{m}))$$

и то, что $\widetilde{\mu}'_X = \widetilde{\mu}_X$ достаточно доказать неприводимость общих слоев $\widetilde{\mu}'_X$. А она в свою очередь следует из неприводимости общих слоев $\mu_X|_\Theta : \Theta \to \mathfrak{a}^{\mathrm{pr}}+(\mathfrak{p}_u^-\cap\mathfrak{m})$ (см. предложение 10). □

Доказательство. [Доказательство теоремы 6] Как мы видели группа Галуа рационального накрытия $G *_{\overline{P}} \mathcal{N}^*_X \to T^*_X$ равна N_X/M, и по теореме 7 отображение $M_{G/P_0^-} \to M_X$ является фактором по действию группы N_X/M, который коммутирует с действием G. Согласно определению Кнопа [9], малая группа Вейля является группой Галуа накрытия $M_{G/P_0^-}/\!\!/G \to M_X/\!\!/G$ (заметим, что $M_{G/P_0^-}/\!\!/G \cong \mathfrak{a}$), которая также равна N_X/M. □

7. Заключение

В заключении отметим, что из приведенной теории легко получить существование стабилизатора общего положения для действия группы G на T^*X, а также описание его связной компоненты (см. [21], Замечание 7.7).

Автор считает, интересной задачу о полном описании стабилизатора общего положения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Berstein I. N., Gelfand I. M. Gelfand S. I., Schubert cells and cohomology of the spaces G/P // Russian Math. Surveys, 1973. Vol. 171, no. 37 (3), P. 3–26.

2. Brion M., The cone of effective one-cycles of certain G-varieties // A Tribute to C. S. Seshadri, Hindustan Book Agency, 2003. P. 180–198.

3. Brion M., Luna D. Vust Th., Espaces homogènes sphériques // Invent. Math. 1986. Vol. 84, P. 617–632.

4. McGovern W. M., The adjoint representation and adjoint action // Algebraic Quotients. Torus Actions and Cohomology. The Adjoint Representation and the Adjoint Action Series: Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Springer-Verlag. 2002. Vol. 131.

5. Grosshans F. D., Constructing invariant polynomials via Tchirnhaus transformations // Invariant theory, Lecture notes in Math. 1987. Vol. 1278, Springer, Berlin, P. 95–102.

6. Hartshorne R., Algebraic geometry, New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1977.

7. Humphreys J. E., Linear algebraic groups. 1975. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag.

8. Knop F., Kraft H., Vust T., The Picard group of a G-variety // Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie, DMV-Seminar, Vol. 13, Basel-Boston: Birkhauser Verlag, 1989. P. 77–88.

9. Knop F., Weylgruppe und Momentabbildung // Invent. Math. 1990. Vol. 99, P. 1–23.

10. Knop F., Uber Bewertungen, welche unter einer reduktiven Gruppe invariant sind // Math. Ann. 1993. Vol. 295, P. 333–363.

11. Knop F., 1994, The asymptotic behavior of invariant collective motion // Invent. math. Vol. 116, P. 309–328.

12. Knop F., A Harish-Chandra Homomorphism for Reductive Group Actions // Annals of Mathematics, Series II, 1994. Vol. 140, 253–288.

13. Knop F., On the Set of Orbits for a Borel Subgroup // Commentarii Mathematici Helvetici, 1995. Vol. 70, P. 285–309.

14. Kraft H., Geometrishe Methoden in der Invariantentheorie, Aspects of Mathematics, Friedr. Vieweg & Sohn, 1984. Braunschweig.

15. Luna D., Grosses cellules pour les varietes spheriques // Algebraic Groups and Lie Groups, Austral. Math. Soc. Lect. Ser. 9, Cambridge Univ. Press 1997. Cambridge, 267–280.

16. Popov V. L., Contractions of the actions of reductive algebraic groups // Mat. Sb. 1986. Vol. 130, no. 3, P. 310–334.

17. Springer T. A., Linear Algebraic Groups Progress in Mathematics 2nd ed., Springer 1998.

18. Timashev D. A., Equivariant symplectic geometry of cotangent bundles II // Moscow Math. J. 2006. Vol. 6, no. 2, P. 389–404.

19. Vinberg E. B., Equivariant symplectic geometry of cotangent bundles // Moscow Math. J. 2001. Vol. 1, no. 2, P. 287–299.

20. Vinberg E. B., Popov V. L., Invariant theory. Algebraic geometry IV. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 55, Berlin: Springer-Verlag, 1994.

21. Zhgoon V. S., On the Local Structure Theorem and Equivariant Geometry of Cotangent Bundles // Journal of Lie Theory. 2013. Vol. 23, no. 3, P. 607–638.

REFERENCES

1. Berstein, I. N., Gelfand, I. M. & Gelfand, S. I., 1973, "Schubert cells and cohomology of the spaces G/P", *Russian Math. Surveys*, vol. 171, no. 37 (3), pp. 3–26.

2. Brion, M., 2003, "The cone of effective one-cycles of certain G-varieties". *A Tribute to C. S. Seshadri,* Hindustan Book Agency, pp. 180–198.

3. Brion, M., Luna, D. & Vust, Th., 1986, "Espaces homogènes sphériques", *Invent. Math.* vol. 84, pp. 617–632.

4. McGovern,W. M., 2002, "The adjoint representation and adjoint action",

   Algebraic Quotients. Torus Actions and Cohomology. The Adjoint Representation and the Adjoint Action Series: Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 131, Springer-Verlag.

5. Grosshans, F. D., 1987, "Constructing invariant polynomials via Tchirnhaus transformations", *Invariant theory, Lecture notes in Math.*, vol. 1278, Springer, Berlin, pp. 95–102.

6. Hartshorne, R., 1977, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.

7. Humphreys, J. E., 1975, *Linear algebraic groups*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.

8. Knop, F., Kraft, H. & Vust, T., 1989, "The Picard group of a G-variety", *Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie (H. Kraft, P. Slodowy, T. Springer eds.) DMV-Seminar, vol. 13*, Birkhauser Verlag, Basel-Boston, pp. 77–88.

9. Knop, F., 1990, "Weylgruppe und Momentabbildung", *Invent. Math.*, vol. 99, pp. 1–23.

10. Knop, F., 1993, "Uber Bewertungen, welche unter einer reduktiven Gruppe invariant sind", *Math. Ann.*, vol. 295, pp. 333–363.

11. Knop, F., 1994, "The asymptotic behavior of invariant collective motion", *Invent. math.*, vol. 116, pp. 309–328.

12. Knop, F., 1994, "A Harish-Chandra Homomorphism for Reductive Group Actions", *Annals of Mathematics, Series II,* vol. 140, 253–288.

13. Knop, F., 1995, "On the Set of Orbits for a Borel Subgroup", *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 70, pp. 285–309.

14. Kraft, H., 1984, *Geometrishe Methoden in der Invariantentheorie*, Aspects of Mathematics, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig.

15. Luna, D., 1997, "Grosses cellules pour les varietes spheriques", *Algebraic Groups and Lie Groups*, Austral. Math. Soc. Lect. Ser. 9, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 267–280.

16. Popov, V.L., 1986, "Contractions of the actions of reductive algebraic groups", *Mat.Sb.*, vol. 130, no. 3, pp. 310–334.

17. Springer, T. A., 1998, *Linear Algebraic Groups*, Progress in Mathematics 2nd ed.

18. Timashev, D. A., 2006, "Equivariant symplectic geometry of cotangent bundles II", *Moscow Math. J.*, vol. 6, no. 2, pp. 389–404.

19. Vinberg, E. B., 2001, "Equivariant symplectic geometry of cotangent bundles", *Moscow Math. J.*, vol. 1, no. 2, pp. 287–299.

20. Vinberg, E. B. & Popov, V.L., 1994, *Invariant theory*, Algebraic geometry IV. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 55, Springer-Verlag, Berlin.

21. Zhgoon, V. S., 2013, "On the Local Structure Theorem and Equivariant Geometry of Cotangent Bundles", *Journal of Lie Theory*, vol. 23, no. 3, pp. 607–638.

Научно исследовательский институт системных исследований.
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики».
Поступило 6.03.2015.