ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 1 (2013)

УДК 531.391

ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ «ПЛАНЕТА С ЯДРОМ — СПУТНИК» В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ СИЛ ВЗАИМНОГО ПРИТЯЖЕНИЯ

А. В. Шатина, Е. В. Шерстнев (г. Москва)

Аннотация

Исследуется движение спутника в гравитационном поле вращающейся планеты. Планета моделируется телом, состоящим из твердого ядра и вязкоупругой оболочки из материала Кельвина — Фойгта. Спутник моделируется материальной точкой. Из вариационного принципа Даламбера — Лагранжа выводится система интегро-дифференциальных уравнений движения механической системы в соответствии с линейной моделью теории упругости. С помощью асимптотического метода разделения движений строится приближенная система уравнений движения в векторном виде, описывающая динамику механической системы с учетом возмущений, вызванных упругостью и диссипацией. Выводится усредненная система дифференциальных уравнений, описывающая эволюцию параметров орбиты спутника. Для частных случаев построены фазовые траектории, найдены стационарные решения и исследована их устойчивость. В качестве примеров рассмотрены некоторые планеты Солнечной системы и их спутники.

THE EVOLUTION OF A SATELLITE MOTION IN THE GRAVITATIONAL FIELD OF A VISCOELASTIC PLANET WITH A CORE

Shatina A. V., Sherstnev E. V.
(Moscow State Technical University of Radio engineering, Electronics and Automation)

Abstract

We investigate the motion of a satellite in the gravitational field of a massive deformable planet. Planet is modeled as body that consists of a solid core and a viscoelastic shell of a Kelvin-Voigt material. The satellite is modeled as a point mass. The system of integro-differential equations for a motion of a mechanical system is got out from the variational principle of the

d'Alembert-Lagrange according to the linear theory of elasticity. Approximate equations of motion in vector are constructed with asymptotic method of motions separation. This system of equations describes the dynamics of the "planet-satellite"with regard to the perturbations caused by elasticity and dissipation. To describe the evolution of the orbital parameters of a satellite, averaged differential equations were derived.

Phase trajectories were constructed for particular cases, their stationary solutions were found and investigated on stability. In the case of the existence of two stationary orbits stationary solution that corresponding to the motion along the orbit of larger radius is asymptotically stable, and the orbit of smaller radius is unstable. Some of the planets in the solar system and their satellites are considered as examples. This problem is a model for the study of the tidal theory of planetary motion

Исследование приливной эволюции системы <планета — спутник> проводилось многими авторами [1, 2, 3]. В работе используются методы аналитической механики систем с бесконечным числом степеней свободы [4]. Ранее указанный подход был применен, в частности, к ряду задач о поступательно-вращательном движении вязкоупругого шара [5, 6, 7, 8].

1 Постановка задачи. Уравнения движения

Рассмотрим задачу о поступательно-вращательном движении системы <планета — спутник> в гравитационном поле сил взаимного притяжения. Спутник будем моделировать материальной точкой P с массой μ. Планету будем моделировать телом, состоящим из твердого ядра и вязкоупругой оболочки, занимающим область $V = V_0 \cup V_1$ в трехмерном евклидовом пространстве при отсутствии деформаций. Здесь $V_0 = \{\, \mathbf{r} \in E^3 : |\mathbf{r}| \leqslant r_0 \}$, $V_1 = \{\, \mathbf{r} \in E^3 : r_0 < |\mathbf{r}| \leqslant r_1 \}$. Пусть ρ_0, ρ_1 — плотности ядра и вязкоупругой оболочки соответственно, а m_0, m_1 — их массы. Предполагается, что материал оболочки планеты является однородным и изотропным.

Введем инерциальную систему координат $OXYZ$ с началом в центре масс системы <планета-спутник>. Для описания вращательного движения планеты введем подвижную систему координат $Cx_1x_2x_3$ жестко связанную с ядром и систему осей Кенига $C\xi_1\xi_2\xi_3$, где C — центр масс планеты в естественном недеформированном состоянии (рис. 1).

Положение точки M планеты в инерциальной системе координат $OXYZ$ определяется векторным полем

$$\mathbf{R}_M(\mathbf{r}, t) = \mathbf{OC} + \Gamma(\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)), \tag{1}$$

где Γ — оператор перехода от подвижной системы координат $Cx_1x_2x_3$ к системе осей Кенига $C\xi_1\xi_2\xi_3$, $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — вектор упругого смещения, равный тождественно

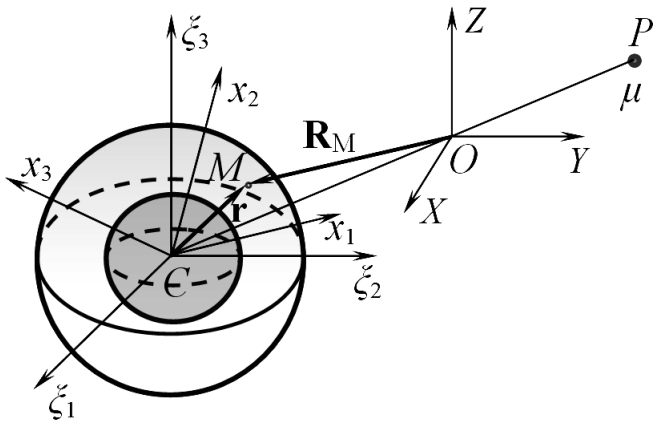

Рис. 1: Иллюстрация задачи

нулю для точек твердого ядра V_0. Так как O — центр масс рассматриваемой механической системы, то

$$\int\limits_V \mathbf{R}_M(\mathbf{r},t)\,\rho dv + \mu\cdot\mathbf{OP} = 0 \tag{2}$$

Здесь $p = \begin{cases} \rho_0, & \mathbf{r}\in V_0 \\ \rho_1, & \mathbf{r}\in V_1 \end{cases}$.

Введем в рассмотрение вектор $\mathbf{R} = \mathbf{CP}$. Тогда из (1) и (2) получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{OC} &= -\frac{\mu}{m+\mu}\mathbf{R} - \frac{1}{m+\mu}\int\limits_{V_1}\Gamma\mathbf{u}\rho_1 dv_1, \\ \mathbf{OP} &= \frac{m}{m+\mu}\mathbf{R} - \frac{1}{m+\mu}\int\limits_{V_1}\Gamma\mathbf{u}\rho_1 dv_1 \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь m — масса планеты, $m = m_0 + m_1$.

Потенциальная энергия гравитационного поля определяется функционалом

$$\Pi = -\mu f\int\limits_V \frac{\rho dv}{|-\mathbf{R}+\Gamma(\mathbf{r}+\mathbf{u})|},$$

где f — универсальная гравитационная постоянная.

Функционал потенциальной энергии упругих деформаций зададим в соответствии с линейной моделью теории упругости:

$$\tilde{\mathscr{E}} = \int\limits_{V_1}\mathscr{E}[\mathbf{u}]\,dv_1, \quad \mathscr{E}[\mathbf{u}] = \alpha_1\left(I_E^2 - \alpha_2 II_E\right),$$

где

$$\alpha_1 = \frac{\mathrm{E}\,(1-\nu)}{2\,(1+\nu)\,(1-2\nu)}, \quad \alpha_2 = \frac{2\,(1-2\nu)}{1-\nu}, \quad \alpha_1 > 0,\ 0 < \alpha_2 < 3,$$

$$I_E = \sum_{j=1}^{3} e_{jj},\ II_E = \sum_{k<l} \left(e_{kk}e_{ll} - e_{kl}^2\right),\ e_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right), \mathbf{u} = (u_1,\ u_2,\ u_3)$$

где E — модуль упругости Юнга, ν — коэффициент Пуассона вязкоупругой оболочки планеты, I_E, II_E — инварианты тензора малых деформаций.

Диссипативные свойства вязкоупругой оболочки опишем диссипативным функционалом

$$\mathscr{D} = \int\limits_{V_1} \mathscr{D}\left[\dot{\mathbf{u}}\right] dv_1, \quad \mathscr{D}\left[\dot{\mathbf{u}}\right] = \chi \mathscr{E}\left[\dot{\mathbf{u}}\right],$$

соответствующим модели Кельвина-Фойгта (здесь $\chi > 0$ — коэффициент внутреннего вязкого трения).

Положим $\mathbf{R}_P = \mathbf{OP}$. Уравнения движения системы <планета-спутник> получим из вариационного принципа Даламбера-Лагранжа:

$$\int\limits_{V} \left(\ddot{\mathbf{R}}_M,\ \delta\mathbf{R}_M\right) \rho dv + \mu \left(\ddot{\mathbf{R}}_P,\ \delta\mathbf{R}_P\right) + \delta\Pi + \\ + \int\limits_{V_1} \left(\nabla_{\mathbf{u}}\mathscr{E}\left[\mathbf{u}\right] + \nabla_{\dot{\mathbf{u}}}\mathscr{D}\left[\dot{\mathbf{u}}\right], \delta\mathbf{u}\right) dv_1 = 0 \quad (4)$$

Согласно равенствам (1) и (3) имеем:

$$\ddot{\mathbf{R}}_M = -\frac{\mu}{m+\mu}\ddot{\mathbf{R}} - \frac{1}{m+\mu}\Gamma \int\limits_{V_1} \left\{\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}] + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{u} + \ddot{\mathbf{u}}\right\} \rho_1 dv_1$$

$$+\Gamma \left\{\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}+\mathbf{u})] + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{r}+\mathbf{u}) + \ddot{\mathbf{u}}\right\},$$

$$\delta\mathbf{R}_M = -\frac{\mu}{m+\mu}\delta\mathbf{R} - \frac{1}{m+\mu}\Gamma \int\limits_{V_1} \left\{\delta\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{u} + \delta\mathbf{u}\right\} \rho_1 dv_1 +$$

$$+\Gamma \left\{\delta\boldsymbol{\alpha} \times (\mathbf{r}+\mathbf{u}) + \delta\mathbf{u}\right\}, \quad (5)$$

$$\ddot{\mathbf{R}}_P = \frac{m}{m+\mu}\ddot{\mathbf{R}} - \frac{1}{m+\mu}\Gamma \int\limits_{V_1} \left\{\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}] + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{u} + \ddot{\mathbf{u}}\right\} \rho_1 dv_1,$$

$$\delta\mathbf{R}_P = \frac{m}{m+\mu}\delta\mathbf{R} - \frac{1}{m+\mu}\Gamma \int\limits_{V_1} \left\{\delta\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{u} + \delta\mathbf{u}\right\} \rho_1 dv_1.$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости планеты, $\delta\boldsymbol{\alpha}$ — вектор, возникающий при варьировании ортогонального оператора Γ:

$$\boldsymbol{\omega}\times(\cdot)=\Gamma^{-1}\dot{\Gamma}(\cdot)\,,\ \ \delta\Gamma(\cdot)=\Gamma\left[\delta\boldsymbol{\alpha}\times(\cdot)\right].$$

Подставляя в равенство (4) выражения (5) для $\ddot{\mathbf{R}}_M$, $\delta\mathbf{R}_M$, $\ddot{\mathbf{R}}_P$, $\delta\mathbf{R}_P$ и приравнивая коэффициенты при независимых вариациях $\delta\mathbf{R}$, $\delta\boldsymbol{\alpha}$, $\delta\mathbf{u}$, получим уравнения движения системы <планета-спутник> в виде:

$$-\frac{\mu}{m+\mu}\int\limits_V\ddot{\mathbf{R}}_M\rho dv+\frac{\mu m}{m+\mu}\ddot{\mathbf{R}}_P+f\mu\int\limits_V\frac{\mathbf{R}-\Gamma(\mathbf{r}+\mathbf{u})}{|\mathbf{R}-\Gamma(\mathbf{r}+\mathbf{u})|^3}\rho dv=\mathbf{0},\tag{6}$$

$$\int\limits_V\left[\mathbf{r}+\mathbf{u}-\frac{1}{m+\mu}\int\limits_{V_1}\mathbf{u}\rho_1 dv_1\right]\times\Gamma^{-1}\ddot{\mathbf{R}}_M\rho dv-\frac{\mu}{m+\mu}\int\limits_{V_1}\mathbf{u}\rho_1 dv_1\times\Gamma^{-1}\ddot{\mathbf{R}}_P-$$
$$-f\mu\int\limits_V\frac{(\mathbf{r}+\mathbf{u})\times(\Gamma^{-1}\mathbf{R}-(\mathbf{r}+\mathbf{u}))}{|\mathbf{R}-\Gamma(\mathbf{r}+\mathbf{u})|^3}\rho dv=\mathbf{0},\tag{7}$$

$$\rho_1\left\{\Gamma^{-1}\ddot{\mathbf{R}}_M-\frac{1}{m+\mu}\int\limits_V\Gamma^{-1}\ddot{\mathbf{R}}_M\rho dv-\frac{\mu}{m+\mu}\Gamma^{-1}\ddot{\mathbf{R}}_P-f\mu\frac{\Gamma^{-1}\mathbf{R}-(\mathbf{r}+\mathbf{u})}{|\mathbf{R}-\Gamma(\mathbf{r}+\mathbf{u})|^3}\right\}+$$
$$+\nabla_{\mathbf{u}}\mathscr{E}\left[\mathbf{u}+\chi\dot{\mathbf{u}}\right]=\mathbf{0}.\tag{8}$$

2 Возмущенная система уравнений движения

Будем полагать, что жесткость вязкоупругой оболочки планеты велика, т.е. мал безразмерный параметр $\tilde{\varepsilon}=\rho\omega_0^2r_1^2\mathrm{E}^{-1}$, где ω_0 — величина модуля начальной угловой скорости планеты. Выбрав соответствующим образом масштабы размерных единиц, можно ввести малый параметр $\varepsilon=\mathrm{E}^{-1}$. При $\varepsilon=0$ вектор упругого смещения $\mathbf{u}$ полагается равным нулю. В этом случае получим задачу о движении механической системы, состоящей из абсолютно твердого тела сферической формы и материальной точки, в поле сил взаимного притяжения. Невозмущенная система уравнений движения имеет вид:

$$\ddot{\mathbf{R}}+\frac{f(m+\mu)}{R^3}\mathbf{R}=\mathbf{0},\qquad A\dot{\boldsymbol{\omega}}=\mathbf{0},$$

где $A=\frac{8\pi}{15}\left[\rho_0r_0^5+\rho_1\left(r_1^5-r_0^5\right)\right]$ — момент инерции планеты в недеформированном состоянии относительно диаметра.

Используя метод разделения движений [4] получим векторную систему дифференциальных уравнений, описывающую поступательно-вращательное движение системы <планета-спутник> с учетом возмущений, вызванных упругостью

и диссипацией. Будем искать вектор-функцию $\mathbf{u}$ из (8), описывающую квазистатические деформации планеты под действием внешних сил и сил инерции в виде: $\mathbf{u} = \varepsilon\mathbf{u}_1 + \varepsilon^2\mathbf{u}_2 + \cdots$.

Было найдено первое приближение $\mathbf{u} = \varepsilon\mathbf{u}_1$. После подстановки этого решения и преобразований получим векторную систему дифференциальных уравнений:

$$\ddot{\mathbf{R}} + \frac{f(m+\mu)}{R^3}\mathbf{R} + \frac{3f(m+\mu)\rho_1^2\varepsilon D}{mR^4}\Gamma\left\{-5\,\boldsymbol{\xi}\,(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\omega})^2 + \boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\omega}^2 + 2\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\omega}) + \right.$$
$$\left. + \frac{6f\mu}{R^3}\left(1 + \frac{3\chi\dot{R}}{R}\right)\boldsymbol{\xi} + \frac{6\chi f\mu}{R^3}\dot{\boldsymbol{\xi}}\right\} = \mathbf{0}, \tag{9}$$

$$\dot{\mathbf{L}} + \frac{6f\mu\rho_1^2\varepsilon D}{R^3}\Gamma\left\{\frac{3\chi f\mu}{R^3}\left[\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\boldsymbol{\xi}\right] + (\boldsymbol{\xi}\,,\boldsymbol{\omega})\left[\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\xi}\right]\right\} = \mathbf{0}, \tag{10}$$

$$D = \frac{4\pi r_1^7}{105}\varphi(x,\nu),$$
$$\varphi(x,\nu) = \frac{(1+\nu)}{\Delta_0}\left\{-16(9k+14)x^{17} - 200(3k+8)x^{14} + 672(4k+9)x^{12} - \right.$$
$$-(210k^2+3044k+5824)x^{10} + (525k^2+1256k+1576)x^7 + 84(17k+12)x^5 -$$
$$\left. -25(21k^2+92k+56)x^3 + 210k^2 + 716k + 416\right\}.$$

Здесь $\mathbf{L}$ — вектор кинетического момента планеты относительно центра масс:

$$\mathbf{L} = \int\limits_V \Gamma(\mathbf{r}+\mathbf{u}) \times \frac{d}{dt}\left[\Gamma(\mathbf{r}+\mathbf{u})\right]\rho dv. \tag{11}$$

Система уравнений (9)–(10) имеет первый интеграл — закон сохранения момента количеств движения системы <планета-спутник> относительно общего центра масс:

$$m_r\mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}} + \mathbf{L} = \mathbf{G}_0,$$

где $m_r = \frac{\mu m}{m+\mu}$, $\mathbf{G}_0$ — постоянный вектор.

3 Эволюция орбитального движения спутника

Так как с точностью до членов порядка ε вектор кинетического момента планеты имеет вид $\mathbf{L} = A\Gamma\boldsymbol{\omega}$, то $\Gamma\boldsymbol{\omega} = A^{-1}\mathbf{L}$. Тогда при учете уравнений (9) и (11) получим векторное дифференциальное уравнение орбитального движения спутника:

$$\mu\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}_0 + \varepsilon\mathbf{F}_1 + \varepsilon\chi\mathbf{F}_2,$$

где

$$\mathbf{F}_0 = -\frac{f_0\mu}{R^3}\mathbf{R},$$

$$\mathbf{F}_1 = -C_1\left\{\frac{\left(\mathbf{G}_0 - m_r\mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}}\right)^2}{A^2R^5}\mathbf{R} + \frac{2\,(\mathbf{R},\mathbf{G}_0\,)\left(\mathbf{G}_0 - m_r\mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}}\right)}{A^2R^5} - \right.$$

$$\left. -\frac{5\mathbf{R}(\mathbf{R},\mathbf{G}_0\,)^2}{A^2R^7} + \frac{6f\mu}{R^8}\mathbf{R}\right\},$$

$$\mathbf{F}_2 = -C_2\left\{\frac{\dot{\mathbf{R}}}{R^8} + \frac{2\dot{R}}{R^9}\mathbf{R} - \frac{\left[\mathbf{G}_0 - m_r\mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}}\right]\times\mathbf{R}}{AR^8}\right\},$$

$$C_1 = 3f_0\mu\rho_1^2Dm^{-1},\quad C_2 = 6f\mu C_1,\quad f_0 = f(m+\mu).$$

Для получения эволюционной системы уравнений движения спутника перейдем к каноническим переменным Делоне L, G, H, g, h [10, 12]. После усреднения уравнений по быстрой угловой переменной l — средней аномалии — получим замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных <действие> L, G, H и медленных угловых переменных g, h.

Выпишем эволюционную систему уравнений орбитального движения спутника в безразмерных переменных n_0, e, i, g, h, где $n_0 = nAG_0^{-1}$ (n — среднее движение по орбите, e — эксцентриситет, i — наклонение орбиты и g — долгота перигелия от восходящего узла). Ось OZ инерциальной системы координат $OXYZ$ направим по вектору $\mathbf{G}_0 = (0,0,G_0)$. Указанная система ОДУ имеет вид:

$$\dot{n}_0 = -\frac{3\Delta_1 n_0^{16/3}}{(1-e^2)^{15/2}}\left\{\left[\cos i - \frac{p}{n_0^{1/3}}(1-e^2)^{1/2}\right]\cdot F_2(e)\cdot(1-e^2)^{3/2} - n_0\cdot F_3(e)\right\},$$

$$\dot{e} = \frac{\Delta_1 n_0^{13/3}e}{(1-e^2)^{13/2}}\left\{\left[\cos i - \frac{p}{n_0^{1/3}}(1-e^2)^{1/2}\right]\cdot F_5(e)\cdot(1-e^2)^{3/2} - n_0\cdot F_4(e)\right\},$$

$$\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}} = -\frac{\Delta_1 n_0^{13/3}\sin i}{(1-e^2)^5}\left\{\frac{1}{2} + \left(\frac{9}{4} - \frac{3}{2}\sin^2 g\right)\,e^2 + \left(\frac{5}{16} - \frac{1}{4}\sin^2 g\right)\,e^4\right\},$$

$$\dot{g} = \frac{\Delta_1 n_0^{13/3}}{(1-e^2)^5}\cdot\cos i\cdot\sin 2g\cdot\left\{\frac{3e^2}{4} + \frac{e^4}{8}\right\} -$$

$$-\frac{\Delta_2 n_0^2}{(1-e^2)^{3/2}}\left\{3\cos i - \frac{p}{n_0^{1/3}}(1-e^2)^{1/2}\right\} +$$

$$+\frac{\Delta_3 n_0^{7/3}\sin i}{(1-e^2)^2}\left\{\frac{5}{2}\cos^2 i - \frac{1}{2} + \frac{15\mu n_0^2}{(m+\mu)(1-e^2)^3}\left(1 + \frac{3e^2}{2} + \frac{e^4}{8}\right)\right\},$$

$$\dot{h} = -\frac{\Delta_1 n_0^{13/3}}{(1-e^2)^5} \cdot \sin 2g \cdot \left\{ \frac{3e^2}{4} + \frac{e^4}{8} \right\} + \frac{\Delta_2 n_0^2}{(1-e^2)^{3/2}} - \frac{\Delta_3 n_0^{7/3} \cos i}{(1-e^2)^2}.$$

Здесь

$$\Delta_1 = \frac{18\varepsilon\chi\mu\rho_1^2 D}{m(m+\mu)f_0^{2/3}} \left(\frac{G_0}{A}\right)^{16/3}, \quad \Delta_2 = \frac{3\varepsilon\mu\rho_1^2 D G_0^3}{(m+\mu)A^4}, \quad \Delta_3 = \frac{3\varepsilon\rho_1^2 D}{m f_0^{2/3}} \left(\frac{G_0}{A}\right)^{13/3},$$

$$p = \frac{A^{1/3} f_0^{2/3} m_r}{G_0^{4/3}},$$

$$F_2(e) = 1 + \frac{15}{2}e^2 + \frac{45}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6, \quad F_3(e) = 1 + \frac{31}{2}e^2 + \frac{255}{8}e^4 + \frac{185}{16}e^6 + \frac{25}{64}e^8,$$

$$F_4(e) = 9 + \frac{135}{4}e^2 + \frac{135}{8}e^4 + \frac{45}{64}e^6, \quad F_5(e) = \frac{11}{2} + \frac{33}{4}e^2 + \frac{11}{16}e^4.$$

Рассмотрим два частных случая движения спутника: а) $i \equiv 0$, б) $e \equiv 0$. В обоих случаях $n_0 = n_{0*}$ является корнем уравнения:

$$n_0 + \frac{p}{n_0^{1/3}} = 1,$$

которое в зависимости от значения параметра p либо не имеет решений, либо имеет одно решение, либо имеет два решения n_{01} и n_{02}. При этом стационарное решение n_{01} асимптотически устойчиво, а n_{02} неустойчиво.

Фазовые портреты для частных случаев систем уравнений при значении параметра $p = 0.375$ изображены на рис. 2.

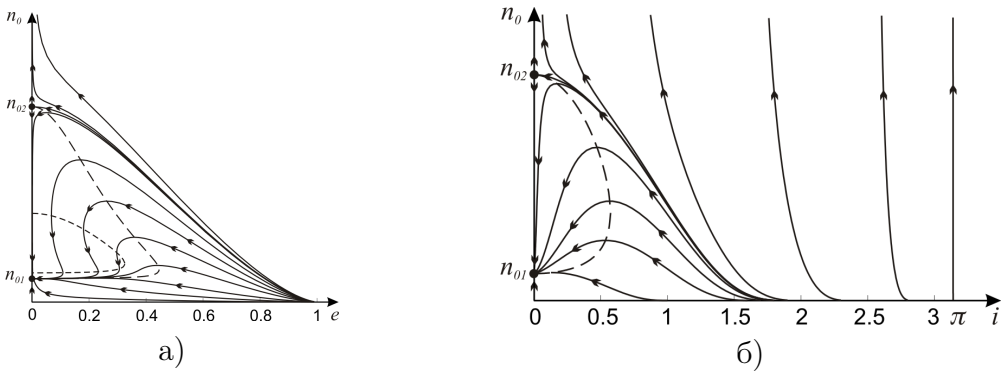

Рис. 2: Фазовые портреты для случаев: а) $i \equiv 0$, б) $e \equiv 0$

В таблице 1 представлены численные значения параметра p, стационарные значения n_{01}, n_{02} и значение величины $n_0 = n_0(0)$ в настоящее время для различных систем <планета-спутник>. Безразмерная переменная пропорциональна среднему движению спутника по орбите и связана с большой полуосью орбиты спутника a соотношением: $a = f_0^{1/3} / \left(G_0 A^{-1} n_0\right)^{2/3}$.

Для всех приведенных примеров, за исключением системы Марс-Фобос, имеет место двойное неравенство: $n_{01} < n_0(0) < n_{02}$. Значение переменной n_0 во время движения уменьшается. Это означает, что большие полуоси орбит спутников увеличиваются, стремясь к асимптотически устойчивым стационарным значениям. При этом для спутников Юпитера и спутника Марса Деймоса текущее значение $n_0(0)$ ближе к неустойчивому стационарному значению n_{02}, а для системы Земля-Луна $n_0(0)$ ближе к асимптотически устойчивому значению n_{01}. Для системы Марс-Фобос $n_{01} < n_{02} < n_0(0)$. Значение переменной n_0 увеличивается. Это означает, что Фобос приближается к Марсу.

Таблица 1: Параметры систем <планета — спутник>

Планета — спутник	p	$n_0(0)$	n_{01}	n_{02}
Земля — Луна	0.15535	$7.2589 \cdot 10^{-3}$	$3.7922 \cdot 10^{-3}$	0.83503
Марс — Фобос	$1.5235 \cdot 10^{-6}$	3.2171	$3.5358 \cdot 10^{-18}$	$1-1.5235 \cdot 10^{-6}$
Марс — Деймос	$2.5391 \cdot 10^{-7}$	$8.1268 \cdot 10^{-1}$	$1.6369 \cdot 10^{-20}$	$1-2.5391 \cdot 10^{-7}$
Юпитер — Ио	$5.8980 \cdot 10^{-4}$	0.2335	$2.0517 \cdot 10^{-10}$	0.9994
Юпитер — Европа	$3.1685 \cdot 10^{-4}$	0.1163	$3.1811 \cdot 10^{-11}$	0.9997
Юпитер — Ганимед	$9.7643 \cdot 10^{-4}$	$5.7650 \cdot 10^{-2}$	$9.3093 \cdot 10^{-10}$	0.9990
Юпитер — Каллисто	$7.0902 \cdot 10^{-4}$	$2.4717 \cdot 10^{-2}$	$3.5644 \cdot 10^{-10}$	0.9993

Заключение

В рамках исследования модели системы <планета — спутник> получены уравнения движения указанной системы. Эти уравнения учитывают возмущающие эффекты, вызванные упругостью и диссипацией, которые влияют на динамику эволюции элементов орбиты согласно приливной теории.

Для двух частных случаев движения, когда наклонение орбиты равно нулю и когда эксцентриситет орбиты так же равен нулю, найдены стационарные решения и исследована их устойчивость. Показано, что в случае существования двух решений, одно из них является асимптотически устойчивым, а второе неустойчивым. Для пар <планета — спутник> Солнечной системы вычислены соответствующие значения и определён характер их движения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Приливы и резонансы в Солнечной системе. Сб. статей / под ред. В.Н. Жаркова М.: Мир, 1975. 287 с.

[2] Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.

[3] Марков Ю.Г., Миняев И.С. Роль приливной диссипации в движении планет и их спутников // Астрон. вестн. 1994. Т. 28. №2. С. 59-72.

[4] Вильке В.Г. Аналитическая механика систем с бесконечным числом степеней свободы. Ч 1,2. М.: Изд-во мех.-мат. факультета МГУ, 1997. Ч.1. 216 с.; Ч.2. 160 с.

[5] Вильке В.Г. Движение вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил // ПММ. 1980. Т.44. Вып. 3. С.395-402.

[6] Шатина А.В. . Эволюция движения вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил // Космич. исследования. 2001. Т. 39. №3. С. 303-315.

[7] Вильке В.Г., Шатина А.В., Шатина Л.С. Эволюция движения двух вязкоупругих планет в поле сил взаимного притяжения // Космич. исследования. 2011. Т. 49. №4. С. 355-362.

[8] Шатина А.В., Шерстнев Е.В. Движение спутника в гравитационном поле вязкоупругой планеты // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 6. С. 913-922.

[9] Лейбензон Л.С. Краткий курс теории упругости. М.;Л.: Гостехиздат, 1942. 304 с.

[10] Мюррей К., Дермотт С. Динамика Солнечной системы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 588 с.

[11] Куликовский П.Г. Справочник любителя астрономии. М.: Кн. дом, 2009.

[12] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1975. 799 с.

Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики МГТУ МИРЭА
Поступило 03.04.2013