ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 10 Выпуск 1 (2009)

О СВЯЗНОСТИ СЛУЧАЙНЫХ ДИСТАНЦИОННЫХ ГРАФОВ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А. Р. Ярмухаметов (г. Москва)

1 Введение.

В данной работе рассматриваются вопросы связности для некоторой серии случайных дистанционных графов. В параграфе 1.1 мы дадим мотивировку дальнейших действий. Параграф 1.2 мы посвятим постановке нашей основной задачи.

1.1 Случайный граф в модели Эрдёша – Реньи.

В 1959 году П. Эрдёш и А. Реньи предложили следующую модель случайного графа (см. [1], [2]): рассматривается вероятностное пространств

$$G(N,p) = (\Omega_N, \mathcal{F}_N, \mathcal{P}_{N,p}),$$

где Ω_N – множество всех графов $G = (V,E)$ на N вершинах без петель, кратных ребер и ориентации (т.е. $|\Omega_N| = 2^{C_N^2}$), $\mathcal{F}_N = 2^{\Omega_N}$,

$$\mathcal{P}_{N,p}(G) = p^{|E|}(1-p)^{C_N^2-|E|},\ p \in (0,1).$$

Иными словами, мы проводим то или иное ребро между вершинами случайного графа с вероятностью p независимо от остальных ребер.

Будем говорить, что случайный граф обладает некоторым свойством *асимптотически почти наверное* (кратко *а.п.н.*), если вероятностная мера множества графов, обладающих этим свойством, стремится к 1 при $N \to \infty$. Отметим, что вероятность ребра p есть, вообще говоря, функция от N.

В работах Эрдёша и Реньи были получены следующие результаты:

1. Величина $p^* = \frac{\ln N}{N}$ является "пороговой вероятностью" для свойства связности случайного графа, то есть при $p \geq cp^*$ (где $c > 1$) случайный граф в пространстве $G(N,p)$ а.п.н. связен, а при $p \leq cp^*$ (где $c < 1$) случайный граф а.п.н. не связен;

2. Величина $p_1^* = \frac{1}{N}$ является "пороговой вероятностью" для существования "гигантской компоненты" в случайном графе, а именно: если $p \leq \frac{c}{N}$ (где $c < 1$), то а.п.н. случайный граф в пространстве $G(N,p)$ будет состоять

из компонент, количество вершин в каждой из которых равно $O(\ln N)$; если же $p \geq \frac{c}{N}$ (где $c > 1$), то случайный граф а.п.н. будет содержать "гигантскую компоненту" размера $\Omega(N)$ (при этом все остальные вершины будут содержаться в компонентах размера $O(\ln N)$).

По тематике случайных графов существует обширная литература – например, книги [1], [2], [3], [4].

1.2 Постановка основной задачи.

Введем новое пространство случайных графов, которое будем называть *пространством случайных дистанционных графов*. Для этого положим $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$, $N = C_n^{n/2}$ и рассмотрим *полный дистанционный граф* $\mathcal{G}_N = (\mathcal{V}_N, \mathcal{E}_N)$, у которого

$$\mathcal{V}_N = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \{0,1\}, x_1 + \ldots + x_n = 2k = \frac{n}{2} \right\},$$

$$\mathcal{E}_N = \left\{ \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \mathcal{V}_N \times \mathcal{V}_N : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = k = \frac{n}{4} \right\}.$$

Таким образом, вершины полного дистанционного графа являются точками из $\{0,1\}^n$ и этих вершин ровно N. При этом ребра графа $\mathcal{G}_N$ суть пары его вершин, удаленные друг от друга на расстояние $\sqrt{\frac{n}{2}}$. Именно этим и обусловлено название графа. Рассмотрение подобных графов глубоко мотивировано задачами комбинаторной геометрии (см. [5], [6]).

Определим новое вероятностное пространство

$$\mathcal{G}^{dist}(N,p) = (\Omega_N^{dist}, \mathcal{F}_N^{dist}, \mathcal{P}_{N,p}^{dist}),$$

где Ω_N^{dist} — множество всех остовных подграфов $G = (\mathcal{V}_N; E)$ полного дистанционного графа $\mathcal{G}_N$, $\mathcal{F}_N^{dist} = 2^{\Omega_N^{dist}}$,

$$\mathcal{P}_{N,p}^{dist}(G) = p^{|E|}(1-p)^{|\mathcal{E}_N|-|E|}, \ p \in (0,1).$$

Несмотря на близость модели, рассматриваемой в данной работе, и классической модели Эрдёша—Реньи случайных графов, между ними имеются существенные различия.

В следующем разделе мы сформулируем результаты для графа $\mathcal{G}^{dist}(N,p)$ о "пороговой вероятности связности" и о нижней границе "наличия гигантской компоненты".

2 Формулировки результатов.

Следующая теорема говорит о "пороговой вероятности" связности для дистанционного случайного графа в пространстве $\mathcal{G}^{dist}(N,p)$.

Теорема 1. *Пусть* $p_* = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2\ln 2}} \frac{(\ln N)^{3/2}}{N}$. *Тогда:*

а) при $p \geq cp_*$, *где* $c > 1$, *случайный граф в пространстве* $\mathcal{G}^{dist}(N,p)$ *а.п.н. связен;*

б) при $p \leq cp_*$, *где* $c < 1$, *случайный граф в пространстве* $\mathcal{G}^{dist}(N,p)$ *а.п.н. не связен.*

Доказательству теоремы 1 посвящен раздел 3.

Теорема 2. *Пусть* $p_{**} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2\ln 2}} \frac{(\ln N)^{1/2}}{N}$. *Тогда при* $p \leq cp_{**}$, *где* $c < 1$, *случайный граф в пространстве* $\mathcal{G}^{dist}(N,p)$ *а.п.н. будет состоять из компонент, количество вершин в каждой из которых не превышает* $O(\ln N)$.

Теорема 2 будет доказана в разделе 4.

3 Доказательство теоремы 1.

В параграфе 3.1 будут приведены некоторые предварительные выкладки. В параграфе 3.2 будет доказан пункт б) теоремы 1. В параграфе 3.3 будет приведена схема доказательства пункта а) теоремы 1. В параграфе 3.4 будут доказаны утверждения, используемые в доказательстве пункта а).

3.1 Некоторые предварительные выкладки.

Определим случайную величину X_N на вероятностном пространстве $\mathcal{G}^{dist}(N,p)$ следующим образом:

$$X_N(G) = \begin{cases} 0, \text{ если случайный граф } G \in \Omega_N^{dist} \text{ связен,} \\ k, \text{ где } k \geq 2 \text{ - число компонент связности случайного} \\ \quad \text{графа } G \in \Omega_N^{dist}, \text{ если обозначенный граф не связен.} \end{cases}$$

Строго говоря, мы всюду ниже будем работать с вероятностными мерами, которые мы обозначали $\mathcal{P}_{N,p}^{dist}$. Всякий раз, когда это не будет приводить к путанице, для краткости будем писать P вместо $\mathcal{P}_{N,p}^{dist}$.

В соответствии с формулой Стирлинга общее число вершин в графе $\mathcal{G}_N$ есть

$$N = C_n^{\frac{n}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{n}} \cdot (1 + \delta_1(n)),$$

$$n = \frac{\ln N}{\ln 2} \cdot (1 + \delta_2(N)),$$

где $\delta_1(n) = o(1)$ и $\delta_2(N) = o(1)$.

Число ребер, выходящих из одной вершины графа $\mathcal{G}_N$, обозначим N_1. В соответствии с формулой Стирлинга

$$N_1 = \left(C_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{4}}\right)^2 = \frac{2\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \cdot (1 + \delta_3(N)),$$

где $\delta_3(N) = o(1)$.

3.2 Доказательство пункта б теоремы 1.

Нам нужно показать, что $P(X_N = 0) \to 0$ при $N \to \infty$. Введем вспомогательные случайные величины:

$X_{N,i}$ – число i-элементных компонент связности случайного графа в пространстве $\mathcal{G}^{dist}(N,p)$,

$$X_{N,ij} = \begin{cases} 1, & \text{если множество } (i,j) \text{ образует компоненту связности,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь (i,j) - обозначение для j-го по счету i-элементного множества вершин рассматриваемого случайного графа.

Всюду далее $EX_{N,i}$ и $EX_{N,ij}$ - математическое ожидание случайных величин $X_{N,i}$ и $X_{N,ij}$ соответственно.

При фиксированных p и n выполнено: $EX_{N,1} > 0$. В соответствии с неравенством Чебышева имеем:

$$P(X_N = 0) \le P(X_{N,1} = 0) = P(X_{N,1} \le 0) = P(-(X_{N,1} - EX_{N,1}) \ge EX_{N,1}) \le$$

$$\le \frac{E(X_{N,1} - EX_{N,1})^2}{(EX_{N,1})^2} = \frac{EX_{N,1}^2 - (EX_{N,1})^2}{(EX_{N,1})^2}.$$

Посчитаем асимптотику второго момента случайной величины $X_{N,1}$:

$$EX_{N,1}^2 = E\left(\sum_{i=1}^{N} X_{N,1i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} EX_{N,1i}^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} E\left(X_{N,1i} \cdot X_{N,1j}\right),$$

$$(EX_{N,1})^2 = \left(E\sum_{i=1}^{N} X_{N,1i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} (EX_{N,1i})^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} (EX_{N,1i} \cdot EX_{N,1j}).$$

Таким образом, имеем:

$$EX_{N,1}^2 - (EX_{N,1})^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(EX_{N,1i}^2 - (EX_{N,1i})^2\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \left(E\left(X_{N,1i} \cdot X_{N,1j}\right) - EX_{N,1i} \cdot EX_{N,1j}\right) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{N} EX_{N,1i}^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \left(E\left(X_{N,1i} \cdot X_{N,1j}\right) - EX_{N,1i} \cdot EX_{N,1j}\right).$$

Так как случайные величины $X_{N,ij}$ могут принимать значения 0 или 1, то

$$X_{N,1i}^2 = X_{N,1i} \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} EX_{N,1i}^2 = \sum_{i=1}^{N} EX_{N,1i} = EX_{N,1}.$$

Если i-я и j-я вершины не соединены ребром в полном дистанционном графе $\mathcal{G}_N$, то

$$E\left(X_{N,1i} \cdot X_{N,1j}\right) = EX_{N,1i} \cdot EX_{N,1j}.$$

Если i-я и j-я вершины соединены ребром в графе $\mathcal{G}_N$, то

$$E\left(X_{N,1i} \cdot X_{N,1j}\right) - EX_{N,1i} \cdot EX_{N,1j} =$$
$$= (1-p)^{2N_1-1} - (1-p)^{N_1} \cdot (1-p)^{N_1} = p \cdot (1-p)^{2N_1-1}.$$

Далее имеем:

$$EX_{N,1}^2 - (EX_{N,1})^2 \le EX_{N,1} + N \cdot N_1 \cdot p \cdot (1-p)^{2N_1-1},$$
$$EX_{N,1} = N \cdot (1-p)^{N_1}.$$

Можно продолжить цепочку неравенств:

$$P(X_N = 0) \le P(X_{N,1} = 0) \le \frac{EX_{N,1}^2 - (EX_{N,1})^2}{(EX_{N,1})^2} \le$$
$$\le \frac{1}{EX_{N,1}} + \frac{N \cdot N_1 \cdot p \cdot (1-p)^{2N_1-1}}{N^2 \cdot (1-p)^{2N_1}} = \frac{1}{EX_{N,1}} + \frac{p \cdot N_1}{(1-p) \cdot N}.$$

В то же время

$$EX_{N,1} \ge N\left(1 - c\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2\ln 2}}\frac{(\ln N)^{3/2}}{N}\right)^{N_1} = Ne^{-c(1+\delta_4(N))\ln N},$$

где $\delta_4(N) = o(1)$.

Поскольку $c < 1$, то при достаточно больших N имеем: $c(1+\delta_4(N)) \le c' < 1$. Значит, $Ne^{-c(1+\delta_4(N))\ln N} \ge N^{1-c'} \to \infty$ при $N \to \infty$, следовательно,

$$\frac{1}{EX_{N,1}} \to 0 \quad \text{при } N \to \infty.$$

Кроме того,

$$\frac{p \cdot N_1}{(1-p) \cdot N} \le \frac{2\sqrt{2\ln 2} \cdot cp_*}{\sqrt{\pi}\sqrt{\ln N}(1-cp_*)}(1+\delta_3(N)) \le$$
$$\le \frac{\ln N}{N}(1+\delta_5(N)) \to 0 \quad \text{при } N \to \infty,$$

где $\delta_5(N) = o(1)$.

Из вышесказанного следует, что

$$P(X_N = 0) \to 0 \quad \text{при } N \to \infty.$$

Пункт б теоремы 1 доказан.

3.3 Схема доказательства пункта а теоремы 1.

Утверждение 1. *Если $EX_N \to 0$ при $N \to \infty$, то случайный граф в пространстве $\mathcal{G}^{dist}(N,p)$ а.п.н. связен.*

Доказательство. Имеем $P(X_N = 0) \geq 1 - EX_N$, и все доказано.

Существенно более нетривиальным является следующее утверждение.

Утверждение 2. *Число общих соседних вершин для двух любых различных вершин графа $\mathcal{G}_N$ при достаточно больших N не меньше, чем*

$$N_2 = 10^{-4}\frac{N}{\ln N}.$$

Утверждение 2 будет доказано в пункте 3.4.1 параграфа 3.4.

Обозначим через $f(i, N-i)$ минимальное число ребер между подмножеством множества вершин графа $\mathcal{G}_N$ из i элементов и его дополнением из $N-i$ элементов, где минимум берется по всем i-элементным подмножествам множества вершин графа $\mathcal{G}_N$.

Тогда

$$EX_N \leq \sum_{i=1}^{N-1} C_N^i (1-p)^{f(i,N-i)} = \sum_{\substack{i=1 \\ \min(i,N-i)<\alpha N_1}}^{N-1} C_N^i (1-p)^{f(i,N-i)} +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha N_1 \leq \min(i,N-i)<\beta N_1}}^{N-1} C_N^i (1-p)^{f(i,N-i)} +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1 \\ \min(i,N-i)\geq \beta N_1}}^{N-1} C_N^i (1-p)^{f(i,N-i)} = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3,$$

где $0 < \alpha < 1 < \beta$ — любые фиксированные константы.

Далее будем оценивать каждую из этих сумм.

Утверждение 3. *Если $p \geq cp_1^*$, где $p_1^* = \frac{(\ln N)^{3/2}}{N}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2\ln 2}(1-\alpha)^2}$, $c > 1$, то $\sum_1 \to 0$ при $n \to \infty$.*

Утверждение 3 будет доказано в пункте 3.4.2 параграфа 3.4.

Сформулируем следующее вспомогательное утверждение, которое будет использоваться при оценке $\sum_2$ и $\sum_3$.

Утверждение 4. *Для любого i при достаточно больших N имеет место неравенство $f(i, N-i) \geq \min(i, N-i)\frac{N_2}{3}$.*

Утверждение 4 будет доказано в пункте 3.4.3 параграфа 3.4.

Утверждение 5. *Пусть* $p_* = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2\ln 2}}\frac{(\ln N)^{3/2}}{N}$. *Тогда при* $p \geq cp_*$, *где* $c > 1$, *имеем* $\sum_2 \to 0$ *при* $N \to \infty$ *при фиксированных* $0 < \alpha < 1 < \beta$.

Утверждение 6. *При* $p \geq cp_*$, *где* $c > 1$, *и при* $\beta \geq 10^5$ *имеем* $\sum_3 \to 0$ *при* $N \to \infty$.

Утверждения 5 и 6 будут доказаны в пунктах 3.4.4 и 3.4.5 параграфа 3.4.

Таким образом, пункт **а** теоремы следует из утверждений 1, 3, 5, и 6. Достаточно положить
$\alpha = 1 - \sqrt{\frac{2}{c+1}}$ и $\beta = 10^5$.

3.4 Доказательство утверждений 2,3,4,5,6.

3.4.1 Доказательство утверждения 2.

Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — две различные вершины графа $\mathcal{G}_N$, такие, что скалярное произведение $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = s$, где $0 \leq s \leq 2k = \frac{n}{2}$.

Очевидно, что число общих соседних вершин у $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ равняется величине:

$$\sum_{t=0}^{w} \left(C_w^t\right)^2 \left(C_{2k-w}^{k-t}\right)^2, \qquad \text{где } w = \min(s, 2k-s).$$

Далее будем обозначать это число $R(k,s)$.

Очевидно, $R(k,s) = R(k,2k-s)$, поэтому без ограничения общности будем считать, что $s \leq k$. Тогда:

$$R(k,s) = \sum_{t=0}^{s} \left(C_s^t\right)^2 \left(C_{2k-s}^{k-t}\right)^2.$$

Если $s \leq \sqrt{k} \sim \frac{\sqrt{\ln N}}{2\sqrt{\ln 2}}$, то в соответствии с неравенством Коши-Буняковского имеем:

$$R(k,s) = \sum_{t=0}^{s} \left(C_s^t\right)^2 \left(C_{2k-s}^{k-t}\right)^2 \geq \frac{1}{s+1}\left(\sum_{t=0}^{s} C_s^t C_{2k-s}^{k-t}\right)^2 = \frac{\left(C_{2k}^k\right)^2}{s+1} \sim$$

$$\sim \frac{1}{s+1}\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{2^{n/2}}{\sqrt{n/2}}\right)^2 \geq \frac{4\sqrt{2}\ln 2}{\sqrt{\pi}}\frac{N}{\ln N}(1+\delta_6(N)) \geq N_2,$$

где $\delta_6(N) = o(1)$.

Всюду далее будем считать, что $s > \sqrt{k}$ (в этом случае важно, что $s \to \infty$ при $n \to \infty$), имеем:

$$R(k,s) = \sum_{t=0}^{s} \left(C_s^t\right)^2 \left(C_{2k-s}^{k-t}\right)^2 \geq \sum_{s/2-\sqrt{s}\leq t\leq s/2+\sqrt{s}} \left(C_s^{s/2+(t-s/2)}\right)^2 \left(C_{2k-s}^{k-s/2-(t-s/2)}\right)^2 \geq$$

$$\geq \sqrt{s}\left(C_s^v C_{2k-s}^{k-v}\right)^2 = \sqrt{s}\left(C_s^{[s/2]} C_{2k-s}^{[k-s/2]}\right)^2 \left(\frac{C_s^v}{C_s^{[s/2]}}\right)^2 \left(\frac{C_{2k-s}^{k-v}}{C_{2k-s}^{[k-s/2]}}\right)^2,$$

где $v = [s/2 + \sqrt{s}]$.

Теперь оценим каждый из множителей по отдельности, используя формулу Стирлинга:

1)

$$C_s^{[s/2]} \sim \frac{\sqrt{2\pi s} s^s e^{-s}}{\sqrt{2\pi[s/2]}[s/2]^{[s/2]} e^{-[s/2]} \sqrt{2\pi(s-[s/2])}(s-[s/2])^{(s-[s/2])} e^{-(s-[s/2])}} \sim$$

$$\sim \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \cdot \frac{s^s}{[s/2]^{[s/2]}(s-[s/2])^{(s-[s/2])}} \sim$$

$$\sim \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \cdot \frac{s^s}{(s/2)^{(s/2)}(s/2)^{(s/2)}} \left(\frac{s/2}{[s/2]} \frac{s/2}{(s-[s/2])}\right)^{[s/2]} \cdot \left(\frac{s/2}{s-[s/2]}\right)^{2\{s/2\}} \sim$$

$$\sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2^s}{\sqrt{s}} \left(\frac{s^2/4}{s^2/4 - \{s/2\}^2}\right)^{[s/2]} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2^s}{\sqrt{s}}.$$

Аналогичным образом получим, что

$$C_{2k-s}^{[k-s/2]} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2^{2k-s}}{\sqrt{2k-s}}.$$

Таким образом, имеем:

$$\left(C_s^{[s/2]} C_{2k-s}^{[k-s/2]}\right)^2 \sim \frac{4}{\pi^2} \frac{2^{4k}}{s(2k-s)}.$$

2)

$$\frac{C_s^v}{C_s^{[s/2]}} \sim \frac{\sqrt{2\pi s} s^s e^{-s}}{\sqrt{2\pi v} v^v e^{-v} \sqrt{2\pi(s-v)}(s-v)^{(s-v)} e^{-(s-v)}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\sqrt{2\pi[s/2]}[s/2]^{[s/2]} e^{-[s/2]} \sqrt{2\pi(s-[s/2])}(s-[s/2])^{(s-[s/2])} e^{-(s-[s/2])}}{\sqrt{2\pi s} s^s e^{-s}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi[s/2]}[s/2]^{[s/2]} \sqrt{2\pi(s-[s/2])}(s-[s/2])^{(s-[s/2])}}{\sqrt{2\pi v} v^v \sqrt{2\pi(s-v)}(s-v)^{(s-v)}} \sim$$

$$\sim \frac{s/2}{\sqrt{(s/2+\sqrt{s})(s/2-\sqrt{s})}} \cdot \frac{(s/2)^{(s/2)}(s/2)^{(s/2)}}{(s/2+\sqrt{s})^{(s/2+\sqrt{s})} \cdot (s/2-\sqrt{s})^{(s/2-\sqrt{s})}} \cdot$$

$$\cdot \frac{(s/2+\sqrt{s})^{(s/2+\sqrt{s})} \cdot (s/2-\sqrt{s})^{(s/2-\sqrt{s})}}{[s/2+\sqrt{s}]^{[s/2+\sqrt{s}]} \cdot (s-[s/2+\sqrt{s}])^{(s-[s/2+\sqrt{s}])}} \sim$$

$$\sim \left(\frac{s^2/4}{s^2/4-s}\right)^{s/2} \cdot \left(\frac{s/2-\sqrt{s}}{s/2+\sqrt{s}}\right)^{\sqrt{s}} \cdot \frac{(v+\{v\})^{(v+\{v\})}(s-v-\{v\})^{(s-v-\{v\})}}{v^v (s-v)^{s-v}} =$$

$$= \left(1-\frac{4}{s}\right)^{-s/2} \cdot \left(1-\frac{2\sqrt{s}}{s/2+\sqrt{s}}\right)^{\sqrt{s}} \cdot \left(\frac{v+\{v\}}{v}\right)^{v} \cdot \left(\frac{s-v-\{v\}}{s-v}\right)^{s-v} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{v+\{v\}}{s-v-\{v\}}\right)^{\{v\}} \sim e^2 \cdot e^{-4} \cdot e^{\{v\}} \cdot e^{-\{v\}} \cdot \left(\frac{s/2+\sqrt{s}}{s/2-\sqrt{s}}\right)^{\{v\}} \sim e^{-2}.$$

3) Введем обозначение $u = 2k-s$. Ясно, что $u \geq s$. Имеем очевидную цепочку неравенств

$$k - s/2 > k - v = k - [s/2+\sqrt{s}] = k - s/2 - \sqrt{s} + \{s/2+\sqrt{s}\} \geq u/2 - \sqrt{u}.$$

Если при этом $u/2-\sqrt{u} \in \mathbb{N}$, то имеем $C_{2k-s}^{k-v} \geq C_u^{u/2-\sqrt{u}} = C_u^{u/2+\sqrt{u}}$. Если же $u/2-\sqrt{u} \notin \mathbb{N}$, то имеем $k-v \geq u/2-\sqrt{u}+1$, а следовательно, $C_{2k-s}^{k-v} \geq C_u^{[u/2-\sqrt{u}]+1} = C_u^{[u/2+\sqrt{u}]}$. Таким образом, получили, что $C_{2k-s}^{k-v} \geq C_u^{[u/2+\sqrt{u}]}$, а значит,

$$\frac{C_{2k-s}^{k-v}}{C_{2k-s}^{[k-s/2]}} \geq \frac{C_u^{[u/2+\sqrt{u}]}}{C_u^{[u/2]}} \geq e^{-2}(1+\delta_7(u)),$$

где $\delta_7(u) = o(1)$. В итоге при достаточно больших N имеем:

$$R(k,s) \geq \sqrt{s}\left(C_s^{[s/2]} C_{2k-s}^{[k-s/2]}\right)^2 \left(\frac{C_s^v}{C_s^{[s/2]}}\right)^2 \left(\frac{C_{2k-s}^{k-v}}{C_{2k-s}^{[k-s/2]}}\right)^2 \geq$$

$$\geq \sqrt{s}\frac{4}{\pi^2}\frac{2^{4k}}{s(2k-s)} \cdot e^{-8}(1+\delta_8(s)) \geq \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{2^{4k}}{2k\sqrt{k}} e^{-8}(1+\delta_8(s)) =$$

$$= \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{2^n}{n\sqrt{n}} e^{-8}(1+\delta_8(s)) > \frac{8(\ln 2)\sqrt{2}}{4000\pi\sqrt{\pi}} \cdot \frac{N}{\ln N} > N_2,$$

где $\delta_8(s) = o(1)$.

Утверждение 2 доказано.

3.4.2 Доказательство утверждения 3.

Замечая, что $f(i, N-i) = f(N-i, i)$, имеем

$$\sum\nolimits_1 = 2 \cdot \sum_{i<\alpha N_1} C_N^i (1-p)^{f(i,N-i)}.$$

Пусть A - произвольное подмножество вершин графа $\mathcal{G}_N$, $|A| = i < \alpha N_1$. Из каждой вершины множества A выходит N_1 ребер. Так как любая вершина множества A соединена ребром не более чем с αN_1 элементами множества A, то каждая вершина множества A соединена не менее чем с $(1-\alpha)N_1$ вершинами множества $\overline{A}$, отсюда имеем, что $f(i, N-i) \geq (1-\alpha)iN_1$.

Используя полученную оценку, получаем, что при p, данном в условии утверждения, и при достаточно больших N:

$$\sum\nolimits_1 \le 2 \sum_{1\le i<\alpha N_1} C_N^i \left(1 - c\frac{(\ln N)^{3/2}}{N}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2\ln 2}(1-\alpha)^2}\right)^{(1-\alpha)i\frac{2\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{\pi}}\frac{N}{\sqrt{\ln N}}(1+\delta_3(N))} \le$$

$$\le 2 \sum_{1\le i<\alpha N_1} \frac{1}{i!}\left(\frac{1}{N^{c-1}}\right)^i \le 2\left(e^{\frac{1}{N^{c-1}}} - 1\right) \to 0 \qquad \text{при } N \to \infty.$$

Утверждение 3 доказано.

3.4.3 Доказательство утверждения 4.

Пусть A - произвольное подмножество вершин графа $\mathcal{G}_N$.

Без ограничения общности можно считать, что $i = |A| \le \frac{N}{2}$. Если из каждой вершины множества A выходит по крайней мере $\frac{N_2}{2}$ ребер в множество $\overline{A}$, то неравенство в утверждении 4 оказывается верным. Далее будем предполагать, что существует по крайней мере одна вершина множества A (обозначим ее через x), из которой в множество $\overline{A}$ выходит менее, чем $\frac{N_2}{2}$ ребер.

Пусть $B = \overline{A}$, обозначим через B_1 подмножество тех вершин множества B, которые соединены с вершиной x множества A. Далее рассмотрим $y \in B\backslash B_1$. У вершин x и y есть по крайней мере N_2 общих соседних вершин, но так как из вершины x в множество B выходит менее, чем $\frac{N_2}{2}$ ребер, то по крайней мере $\frac{N_2}{2}$ общих соседних вершин вершин x и y лежат в множестве A.

Таким образом, получается, что из любой вершины $y \in B\backslash B_1$ в множество A выходит не менее, чем $\frac{N_2}{2}$ ребер.

В итоге мы доказали, что при достаточно больших N неравенство из утверждения 4 оказывается верным в любом случае.

Утверждение 4 доказано.

3.4.4 Доказательство утверждения 5.

Имеем

$$\sum\nolimits_2 = 2 \sum_{\alpha N_1 \le i < \beta N_1} C_N^i (1-p)^{f(i,N-i)} =$$

$$= 2 \sum_{\alpha\frac{2\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{\pi}}\frac{N}{\sqrt{\ln N}}(1+\delta_3(N)) \le i < \beta\frac{2\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{\pi}}\frac{N}{\sqrt{\ln N}}(1+\delta_3(N))} C_N^i (1-p)^{f(i,N-i)},$$

где $\delta_3(N) = o(1)$. Оценим любое слагаемое из этой суммы, используя формулу Стирлинга и тот факт, что для любого i, входящего в эту сумму, существует $\gamma \in \left[\alpha\frac{2\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{\pi}}(1+\delta_3(N)); \beta\frac{2\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{\pi}}(1+\delta_3(N))\right]$, такое, что $i = \gamma\frac{N}{\sqrt{\ln N}}$. Тогда при достаточно больших N:

$$C_N^i(1-p)^{f(i,N-i)} \le$$

$$\le \frac{\sqrt{2\pi N}\,N^N e^{-N}}{\sqrt{2\pi i}\,i^i\,e^{-i}\sqrt{2\pi(N-i)}\,(N-i)^{(N-i)}\,e^{-(N-i)}}(1+\delta_9(N))\,(1-cp_*)^{\frac{iN_2}{3}} \le$$

$$\le \frac{N^N}{i^i\,(N-i)^{(N-i)}}\left(1-c\frac{(\ln N)^{3/2}}{N}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2\ln 2}}\right)^{\frac{\gamma}{3}\frac{N}{\sqrt{\ln N}}10^{-4}\frac{N}{\ln N}} = \left(\frac{N}{N-\gamma N/\sqrt{\ln N}}\right)^N \cdot$$

$$\cdot\left(\frac{N-\gamma\frac{N}{\sqrt{\ln N}}}{\gamma\frac{N}{\sqrt{\ln N}}}\right)^{\gamma\frac{N}{\sqrt{\ln N}}}\left(1-c\frac{(\ln N)^{3/2}}{N}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2\ln 2}}\right)^{10^{-4}\frac{\gamma}{3}\frac{N^2}{(\ln N)^{3/2}}} =$$

$$= e^{\frac{\gamma N}{\sqrt{\ln N}}(1+\delta_{10}(N))}\left(\frac{\sqrt{\ln N}}{\gamma}-1\right)^{\frac{\gamma N}{\sqrt{\ln N}}} e^{-10^{-4}\frac{\sqrt{\pi}}{6\sqrt{2\ln 2}}c\gamma N(1+\delta_{11}(N))} \le$$

$$\le e^{-10^{-6}c\gamma N} \le e^{-10^{-6}c\alpha N}$$

где $\delta_9(N)=o(1)$, $\delta_{10}(N)=o(1)$, $\delta_{11}(N)=o(1)$.
Следовательно, при достаточно больших N:

$$\sum\nolimits_2 \le Ne^{-10^{-6}c\alpha N} \to 0 \text{ при } N\to\infty.$$

Утверждение 5 доказано.

3.4.5 Доказательство утверждения 6.

Имеем

$$\sum\nolimits_3 = \sum_{\beta N_1\le i\le N-\beta N_1} C_N^i(1-p)^{f(i,N-i)} =$$

$$= \sum_{\beta_1\frac{N}{\sqrt{\ln N}}(1+\delta_3(N))\le i\le N-\beta_1\frac{N}{\sqrt{\ln N}}(1+\delta_3(N))} C_N^i(1-p)^{f(i,N-i)},$$

где $\beta_1=\frac{2\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{\pi}}\beta$, $\delta_3(N)=o(1)$.
Далее, при достаточно больших N:

$$\sum\nolimits_3 \le \sum_{\beta_1\frac{N}{\sqrt{\ln N}}(1+\delta_3(N))\le i\le N-\beta_1\frac{N}{\sqrt{\ln N}}(1+\delta_3(N))} C_N^i\left(1-c\frac{(\ln N)^{3/2}}{N}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2\ln 2}}\right)^{\frac{\min(i;N-i)N_2}{3}} \le$$

$$\le \left(1-c\frac{(\ln N)^{3/2}}{N}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2\ln 2}}\right)^{\frac{1}{3}\frac{\beta_1(1+\delta_3(N))N}{\sqrt{\ln N}}10^{-4}\frac{N}{\ln N}} \sum_{\beta_1\frac{N}{\sqrt{\ln N}}(1+\delta_3(N))\le i\le N-\beta_1\frac{N}{\sqrt{\ln N}}(1+\delta_3(N))} C_N^i \le$$

$$\le e^{-c\frac{(\ln N)^{3/2}}{N}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2\ln 2}}\frac{1}{3}\frac{\beta_1(1+\delta_3(N))N}{\sqrt{\ln N}}10^{-4}\frac{N}{\ln N}}\cdot 2^N \le 2^N\cdot e^{-cN\ln 2}\to 0 \text{ при } N\to\infty.$$

$$\sum\nolimits_3 \le \sum_{\beta_1 \frac{N}{\sqrt{\ln N}}(1+\delta_3(N)) \le i \le N-\beta_1 \frac{N}{\sqrt{\ln N}}(1+\delta_3(N))} C_N^i \left(1 - c\frac{(\ln N)^{3/2}}{N}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2\ln 2}}\right)^{\frac{\min(i;N-i)N_2}{3}} \le$$

$$\le \left(1 - c\frac{(\ln N)^{3/2}}{N}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2\ln 2}}\right)^{\frac{1}{3}\frac{\beta_1(1+\delta_3(N))N}{\sqrt{\ln N}}10^{-4}\frac{N}{\ln N}} \sum_{\beta_1 \frac{N}{\sqrt{\ln N}}(1+\delta_3(N)) \le i \le N-\beta_1 \frac{N}{\sqrt{\ln N}}(1+\delta_3(N))} C_N^i \le$$

$$\le e^{-c\frac{(\ln N)^{3/2}}{N}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2\ln 2}}\frac{1}{3}\frac{\beta_1(1+\delta_3(N))N}{\sqrt{\ln N}}10^{-4}\frac{N}{\ln N}} \cdot 2^N \le 2^N \cdot e^{-cN\ln 2} \to 0 \text{ при } N \to \infty.$$

Утверждение 6 доказано.

4 Доказательство теоремы 2.

4.1 Ветвящиеся процессы.

Здесь будет использована технология, впервые примененная Карпом в 1990 году (см. [1],[7]).

Теорема 2 будет доказана с использованием теории ветвящихся процессов. А именно, пусть неотрицательные, целочисленные случайные величины $Z_1, Z_2, \ldots$ независимы. Определим величины $Y_0, Y_1 \ldots$ рекурсивно:

$$Y_0 = 1,$$

$$Y_i = Y_{i-1} + Z_i - 1,$$

и пусть $T = \min\{t : Y_t = 0\}$. Если такого t, что $Y_t = 0$, не существует, то будем говорить, что $T = +\infty$. Величины Y_i и Z_i отражают ветвящийся процесс следующим образом. В каждый момент времени мы выбираем какой-то из живых организмов, он имеет Z_i детей, а потом умирает. Тогда число Y_i живых организмов в момент времени i задается рекурсией. Процесс обрывается, когда $Y_t = 0$ (вырождение). Значение случайной величины T обозначает общее число организмов, включая „предков“, в этом процессе.

4.2 Завершение доказательства теоремы 2.

Вернемся к случайным графам. Мы определим процедуру нахождения компоненты $C(v)$, содержащей заданную вершину v в заданном графе $G \in \Omega_N^{dist}$. В этой процедуре вершины будут трех видов: живые, мертвые и нейтральные. Первоначально вершина v является живой, а все остальные - нейтральные, время $t = 0$ и $Y_0 = 1$. В каждую единицу времени t мы берем живую вершину w и проверяем, принадлежат ли множеству ребер $E(G)$ графа G все пары $\{w, w'\}$, где w' - нейтральна. Если $\{w, w'\} \in E(G)$, то отмечаем w' как живую, в противном случае она остается нейтральной. После отыскания всех нейтральных w' мы отмечаем w как мертвую, а Y_t принимает значение, равное новому числу

живых вершин. Когда не остается ни одной живой вершины, процедура заканчивается, а $C(v)$ является множеством мертвых вершин. Пусть Z_t - количество тех w', для которых $\{w, w'\} \in E(G)$. Таким образом,

$$Y_0 = 1,$$

$$Y_t = Y_{t-1} + Z_t - 1 \text{ или } Y_t = \sum_{i=1}^{t} Z_i - t + 1.$$

Каждая нейтральная вершина w', соединенная ребром с вершиной w в полном дистанционном графе $\mathcal{G}_N$, независимо от остальных подобных и с вероятностью p становится живой. Здесь никакая пара $\{w, w'\}$ не проверяется дважды, поэтому условная вероятность для $\{w, w'\} \in E(G)$ всегда равняется p. Имеем

$$Z_t \sim \text{Binom}[N_{1,t}, p],$$

где $N_{1,t}$ - последовательность случайных величин, обозначающих число нейтральных вершин, соеденненных с выбранной живой вершиной w на шаге с номером t, а $\text{Binom}[N, t]$ обозначает биномиальное распределение с параметрами N и t. Очевидно, что $N_{1,t} \leq N_1$. Тогда имеем

$$P(T > t) \leq P(Y_t > 0) = P\left(\sum_{i=1}^{t} Z_i \geq t\right) = P\left(\text{Binom}\left[\sum_{i=1}^{t} N_{1,i}, p\right] \geq t\right) \leq$$

$$\leq P\left(\text{Binom}\left[tN_1, \frac{c}{N_1}\right] \geq t\right)(1 + \delta_{12}(N)),$$

где $\delta_{12}(N) = o(1)$. Обозначим

$$H = \text{Binom}\left[tN_1, \frac{c}{N_1}\right].$$

Приведем вспомогательное утверждение.

Утверждение 7. *Пусть Y - сумма взаимно независимых индикаторов, $\mu = E[Y]$. Для всякого $\varepsilon > 0$ выполнено соотношение*

$$P(|Y - \mu| > \varepsilon\mu) < 2e^{-c_\varepsilon \mu},$$

где величина $c_\varepsilon > 0$ зависит только от ε.

Утверждение 7 доказано в книге [1] на странице 292. В нашем случае H является суммой взаимно независимых индикаторов, $E[H] = ct$. Используя утверждение 7, имеем, что

$$P(H \geq t) = P(H - ct > (1 - c)t) \leq P(|H - ct| > (1 - c)t) < 2e^{-\gamma_c ct} = e^{-\alpha t},$$

где $\alpha = \alpha(c) = \gamma_c c$. Пусть $\beta = \beta(c)$ удовлетворяет неравенству $\alpha\beta > 1$. Тогда

$$P(T > \beta \ln N) < N^{-\alpha\beta} = o(N^{-1}).$$

Начальную вершину v можно выбрать N способами. Поэтому почти наверное все компоненты имеют размер $O(\ln N)$.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Алон Н., Спенсер Дж., Вероятностный метод, М. Бином, 2007.

[2] Erdős P., Rényi A., On the evolution of random graphs, Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. 5: 17-61, 1960.

[3] Bollobas B., Random Graphs, Academic Press., New York, 1985.

[4] Колчин В.Ф., Случайные графы, М. ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[5] Райгородский А.М., Линейно-алгебраический метод в комбинаторике, М. МЦНМО, 2007.

[6] Райгородский А.М., "Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств", УМН, 56: 1(337), (2001), 107-146.

[7] Karp R., The transitive closure of a random digraph, Random structures and Algorithms 1: 73-94, 1990.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Получено 10.12.2008