ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 11 Выпуск 2 (2010)

УДК 519.4

Проблема пересечения циклических подгрупп в группах Артина с древесной структурой.

О. Ю. Платонова (г. Новомосковск)

Аннотация

Доказывается, что в группах Артина с древесной структурой разрешима проблема пересечения циклических подгрупп.

Ключевые слова: группа Артина с древесной структурой, диаграмма, область.

Пусть G – конечно порожденная группа Артина с копредставлением $G = \langle a_1, a_2, ..., a_n; \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}} \rangle$, где $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = a_i a_j a_i ...$ - слово длины m_{ij}, состоящее из m_{ij} чередующихся букв a_i и $a_j, i \neq j$, m_{ij} - число, соответствующее симметрической матрице Кокстера, $m_{ij} \geq 2$ при $i \neq j$.

Каждой конечно порожденной группе Артина G соответствует конечный граф Γ^*, между вершинами которого и образующими группы можно установить соответствие такое, что если a_i и a_j являются вершинами ребра e, то ребру соответствует соотношение вида $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}}$ группы G.

В графе Γ^*можно выделить максимальное дерево-граф Γ, $\Gamma \subset \Gamma^*$.

Будем говорить, что группа Артина G_Γ имеет древесную структуру, если между вершинами конечного дерева - графа Γ и образующими группы можно установить соответствие такое, что если a_i и a_j являются вершинами ребра e, то ребру соответствует соотношение вида $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}}$.То есть максимальное дерево-граф Γ соответствует группе, имеющей древесную структуру.

Тогда группа G_Γ отображается с помощью гомоморфизма ψ на группу G_{Γ^*}, т. е. $\psi : G_\Gamma \longrightarrow G$.

Пусть a_i и a_j вершины некоторого ребра e дерева – графа Γ. Группа, порожденная образующими a_i и a_j, имеет копредставление $G_{ij} = \langle a_i, a_j; \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}} \rangle$. Обозначим через R_{ij} множество всех нетривиальных слов, циклически приведенных в свободной группе и равных единице в группе G_{ij}. Тогда копредставление группы G_{ij} запишем через $G_{ij} = \langle a_i, a_j; R_{ij} \rangle$. Пусть группа G порождена более чем двумя образующими.

Тогда группа Артина с древесной структурой может быть задана представлением $G = \langle a_1, a_2, ..., a_n; R \rangle, R = \cup R_{ij}$. Рассмотрим свободную группу $F = \prod_{i=1}^{n} {}^* \langle a_i \rangle$, пусть $w \in F$, обозначим через $\mid w \mid$ длину, а через $\|w\|$- слоговую длину слова w в группе F.

Пусть произвольное слово w не равно единице в свободной группе F и равно единице в G. Тогда на основании теоремы ван Кампена, слово w является граничной меткой связной односвязной диаграммы над R.

Введем следующие преобразования диаграммы (*):

1) Пусть области D_1, D_2 пересекаются по ребру $\varphi(\partial D_1 \cap \partial D_2)$, имеющей словую длину $\| \varphi(\partial D_1 \cap \partial D_2) \| > 1$ и если $\| \varphi(\partial D_1 \cap \partial D_2) \| = 1$ и $\varphi(\partial D_1) \in G_{ab}$, $\varphi(\partial D_2) \in G_{ab}$, тогда, стирая это ребро, объединяем D_1 и D_2 в одну область D. Если метка полученной области D равна единице в свободной группе F, то удалив эту область, склеиваем ее границу.

2) Если две области D_1, D_2, где $\varphi(\partial D_1) \in G_{ab}$, $\varphi(\partial D_2) \in G_{ab}$, имеют общую вершину, то, разъединив эту вершину, они объединяются в одну область D и, если метка полученной области D равна единице в свободной группе F, то удалив эту область, склеиваем ее границу. Если же метка не равна единице, но сократима, то проводим сокращения.

Определение 1. *Назовем внутреннюю точку v диаграммы* ***специально особой точкой****, если $d(v) \geq 3$ и все ребра, исходящие из нее, имеют одинаковые метки.*

Определение 2. *Внутренняя точка диаграммы, не являющаяся специально особой и имеющая степень не менее 3, называется "особой":*

Определение 3. *Область D назовем деновской, если $i(D) < \frac{1}{2}d(D)$, где $i(D)$- число внутренних ребер, $d(D)$ - число ребер в граничном цикле для D.*

Определение 4. *Область с граничным контуром $e\gamma e^{-1}\delta$, склеенная по ребру e и с меткой из R назовем $S-i$ областью.*

Рассмотрим произвольное слово $w \in G$, G - группа Артина с древесной структурой. Пусть произвольное слово w не равно единице в свободной группе F и равно единице в G. Тогда на основании теоремы ван Кампена, слово w является меткой связной односвязной диаграммы M над R. Рассмотрим граничную область D карты M. Обозначим через γ внешнюю границу диаграммы M. Если D является деновской областью, то $\| \partial D \cap \gamma \| > \| \partial D \backslash (\partial D \cap \gamma) \|$. Удаление деновской области D диаграммы M, то есть удаление ее граничного пути, называется *деновским сокращением* диаграммы M или R- *сокращением*. Будем говорить, что M является R- *приведенной*, если она не содержит деновских областей.

Определение 5. *Слово $w \in G$, G - группа Артина с древесной структурой, называется R - приведенным, если w свободно приведено в F и не содержит подслово s, являющееся подсловом некоторого соотношения $r, r = s \cdot t$, где $\|s\| > \frac{1}{2}\|r\|$. Назовем w циклически R - приведенным, если все его циклические перестановки являются R - приведенными словами.*

Теорема 1. *[4] Пусть связная односвязная R-диаграмма M с граничной меткой w, где w не равно единице в свободной группе F и равно единице в G, не содержит $S-i$ областей, тогда она и не содержит внутренней особой точки.*

Теорема 2. *[4] Пусть связная односвязная R-диаграмма M с граничной меткой $w \in G$, не равной единице в свободной группе F и равной единице в G, не содержит $S-i$ областей, но содержит конечное число специально особых точек, тогда на внешнюю границу выходят как минимум три деновские области;*

Теорема 3. *[4] Связная односвязная R - диаграмма M не содержит $S-i$ области;*

Следствие 1. *[4] Пусть связная односвязная диаграмма M с граничной меткой w, где слово w - циклически приведенное слово, не равное единице в свободной группе F, и равное единице в G, не содержит специально особых точек, то она не содержит и особых внутренних точек.*

Из теорем 1,2 и следствия 1 следует, что диаграмма M является однослойной.

Теорема 4. *[4] В группе Артина с древесной структурой разрешима проблема равенства слов.*

Теорема 5. *[4] В конечно порожденной группе Артина с древесной структурой разрешима проблема сопряженности слов.*

Лемма 1. *[3] Группа Артина G_{ij} при $m_{ij} = 2k+1$ изоморфна группе $\langle x, y; x^{2k+1} = y^2\rangle$, а при $m_{ij} = 2k$ — группе $\langle t, x; txt^{-1} = x^k\rangle$.*

Лемма 2. *[3] Пусть $G_{ij} = \langle a_i, a_j; \langle a_i a_j\rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i\rangle^{m_{ji}}\rangle$ - группа Артина и слово $w \in G_{ij}$ циклически несократимо в свободной группе, имеет слоговую длину, равную $2m_{ij}$ и равно единице в G_{ij}. Тогда при $m_{ij} = 2k+1$ имеет вид*

а) $a_i^m a_j a_i ... a_i a_j^{-m} a_i^{-1} ... a_j^{-1}$, *либо*

б) $a_i a_j a_i ... a_i^m a_j^{-1} a_i^{-1} ... a_j^{-m}$, *либо им обратные;*

а при $m_{ij} = 2k$, $k > 1$

а') $a_i^m a_j ... a_i a_j a_i^{-m} a_j^{-1} ... a_j^{-1}$, *либо*

б') $a_i a_j ... a_i a_j^m a_i^{-1} ... a_j^{-m}$, *либо им обратные,* $m \in \{Z \backslash \{0\}\}$.

Определение 6. *Поддиаграмма* $\Pi = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ *образует "полосу" в R-приведенной диаграмме M с граничным циклом* $\partial M = \gamma \cup \delta$, *где* γ *есть путь* $A'B', \delta - A'A_1'B_1'B'$, $AB = \partial\Pi \cap \gamma$, $A_1B_1 = \partial\Pi \cap \delta$ *(Рис.1), если*

1. $\forall i, i = 1, ..., n-1 : \partial D_i \cap \partial D_{i+1} = e_i$ *где* e_i *- ребро;*

2. $\forall i, i = 1, ..., n : \partial D_i \cap \gamma = \gamma_i$ *где* γ_i *- связный путь, причем* $\mid \gamma_i \mid \geq 1$;

3. $|\,\partial D_1 \cap \gamma\,| = |\,\partial D_1 \backslash (\partial D_1 \cap \gamma)\,|\ u\ |\,\partial D_n \cap \gamma\,| = |\,\partial D_n \backslash (\partial D_n \cap \gamma)\,|$*;*

4. $\forall j, j = 2, ..., n-1 : |\,\partial D_j \cap \gamma\,| + 2 = |\,\partial D_j \backslash (\partial D_j \cap \gamma)|$.

В слове w есть $\overline{R}$-сокращение, если в приведенной диаграмме M, граничной меткой которой является слово w, содержится полоса. При этом подслово $\varphi(AB)$ слова w, соответствующее пути γ заменяется словом $\varphi(AA_1B_1B)$в приведенной диаграмме M.

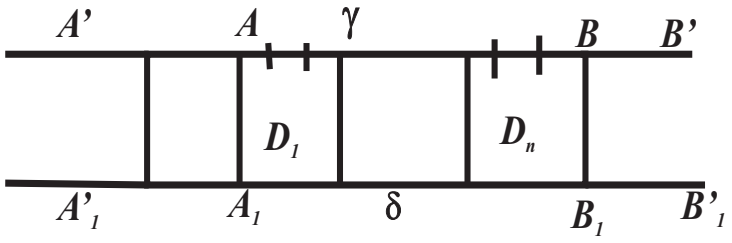

Рис.1 $\overline{R}$ - *сокращение*

Определение 7. *Слово u называется циклически* $\overline{R}$ *- несократимым, если любая его циклическая перестановка* u^* *не содержит* $\overline{R}$ *- сокращения.*

Лемма 3. *[3] Пусть* M *- связная односвязная* $R, \overline{R}$ *приведенная кольцевая диаграмма над группой* G_{ij}, γ, δ *-граничные циклы* M *и* $\varphi(\gamma) = x^p$. *Тогда* $\varphi(\delta) = y^p$, *где* $x, y \in \{a_i^{\pm 1}, a_j^{\pm 1}\}$

Теорема 6. *[4] Группа Артина с древесной структурой свободна от кручения.*

Теорема 7. *[4] Существует алгоритм, строящий по любому несократимому слову w сопряженное с ним или с его квадратом в группе Артина с древесной структурой слово* w_0 , *любая степень которого* $R, \overline{R}$ *- несократима.*

Теорема 8. *[5] В группе Артина с древесной структурой разрешима проблема вхождения в циклическую подгруппу.*

Определение 8. *Область D назовем областью* ***первого*** *типа, если* $\|\partial D \cap \gamma\| = \|\partial D \cap \delta\|$, *где* $d(D) = \|\partial D \cap \gamma\| + \|\partial D \cap \delta\| + 2$.

Определение 9. *Область D назовем областью* ***второго*** *типа, если* $\|\partial D \cap \gamma\| + 2 = \|\partial D \cap \delta\|$, *где* $d(D) = \|\partial D \cap \gamma\| + \|\partial D \cap \delta\| + 2$.

Определение 10. *Область D назовем областью* ***третьего*** *типа, если* $\|\partial D \cap \gamma\| = \|\partial D \cap \delta\| + 2$, *где* $d(D) = \|\partial D \cap \gamma\| + \|\partial D \cap \delta\| + 2$.

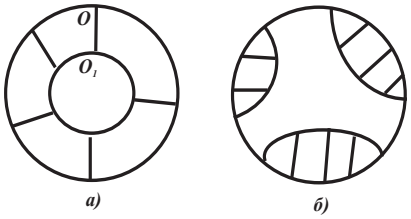

Рис.2 $\overline{R}$ *Кольцевые диаграммы*

Рассмотрим связную кольцевую приведенную R - диаграмму M сопряженности слов v и w. Пусть $\varphi(\gamma) = w, \varphi(\delta) = v$, где γ- внешняя граница диаграммы M , а δ - внутренняя.

Предположим, что диаграмма состоит из областей первого типа и одной области второго (или третьего) типа. Тогда $\|v\| = \|w\| + 2$, или наоборот $\|w\| = \|v\| + 2$. В этом случае переход с помощью сопряжения от слова с большей слоговой длиной к слову с меньшей слоговой длиной назовем *кольцевым сокращением.*

Определение 11. *Циклически R и $\overline{R}$ - несократимое слово w в группе Артина G назовем* ***тупиковым****, если к нему нельзя применить кольцевое сокращение.*

Лемма 4. *[7] Пусть w, v - тупиковые слова из G и пустьw, v сопряжены в G. Тогда $\|w\| = \|v\|$ и никакое слово $u \in G$ такое, что $\|u\| < \|v\|$ не сопряжено с w.*

Теорема 9. *[7] В группе Артина с древесной структурой разрешима проблема степенной сопряженности, т. е. существует алгоритм, позволяющий для любых двух слов $w, v \in G$ установить существуют ли натуральные числа m и n, и элемент z такие, что $z^{-1}w^m z = v^n$.*

Теорема 10. *В группах Артина с древесной структурой разрешима проблема пересечения двух циклических подгрупп, то есть по любым двум словам $w, v \in G$ можно выяснить, существуют ли целые числа m и n такие, что слова w^n и v^m равны в группе G .*

Доказательство. Рассмотрим пересечение двух циклических подгрупп $\langle w \rangle$ и $\langle v \rangle$.

Пусть в группе Артина с древесной структурой существует нетривиальное $u = w^n = v^m$ для некоторых минимальных по абсолютной величине чисел m и n . Используя теорему 7, перейдем от слов v и w к сопряженным с ними или с их квадратами словам v_0 и w_0 , любая степень которых R и $\overline{R}$ - несократима. Теперь уровняем длины слов v_0 и w_0 . Для этого возведем v_0 в степень k_1 , а слово w_0 в степень k_2. Обозначим $v' = v_0^{k_1}, w' = w_0^{k_2}$, . Получим $(w')^k = z^{-1}(v')^k z$.

Так как $(w')^k, (v')^k$ циклически несократимы, то между словами z^{-1} и $(v')^k$, а также между $(v')^k$ и z сокращений нет. Возможны два случая $|z| \neq 0$ и $|z| = 0$.

Если $|z| \neq 0$.

Пусть $w', v' \in G_{ab}$, где $G_{ab} = \langle a, b; R_{ab} \rangle$- группа Артина с двумя образующими. В группе G_{ab} разрешима проблема пересечения циклических подгрупп [3].

Пусть $w', v' \in G$, и w', v' не сопряжены с элементами некоторой группы G_{ab}.

Рассмотрим связную приведенную кольцевую диаграмму M сопряженности слов w', v' вида рис. 2а. По следствию теорем 1,2 диаграмма M однослойная. Диаграмма M может состоять только из областей первого типа, либо содержать области второго и третьего типов, разделенные в общем случае областями первого типа. Причем между двумя областями второго типа должна содержаться область третьего типа, так как в противном случае выделится полоса в диаграмме. Отметим также, что диаграмма не может содержать одну область второго или третьего типов, так как в этом случае получим $\overline{R}$ - сократимость слова w'^2 или v'^2 . Разрежем диаграмму M по ребру, которому соответствует путь OO_1 . Получим связную приведенную R- диаграмму M'.

I. Пусть связная приведенная R - диаграмма M' состоит только из областей первого типа. Приклеим к M' диаграмму M'' , тождественную диаграмме M' с циклическим сдвигом вправо на слово w'.

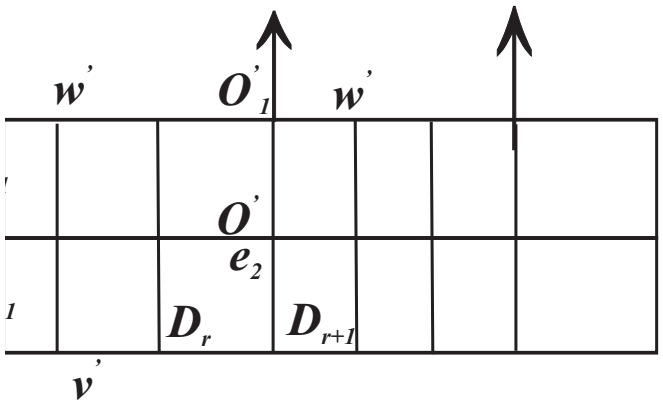

Рис.3 *Подклеивание тождественной диаграммы*

Внутренняя точка O' не имеет степень 3 в диаграмме M'' , так как это противоречит теореме 1.

Таким образом, $O' = \alpha(\partial D_{r+1} \cap \gamma)$ имеет степень 4 (Рис.3). При этом граничные метки смежных областей D_1 и D'_1 принадлежат одной и той же подгруппе вида G_{ij}. Действительно, при $\|\varphi(\partial D_1 \cap \partial D'_1)\| > 1$ это очевидно. Рассмотрим случай $\|\varphi(\partial D_1 \cap \partial D'_1)\| = 1$. Предположим, что метки областей D_1, D'_1 содержат различные образующие. Тогда рассмотрим поддиаграмму, содержащую области D'_l, D_n, D_1, D'_1 , где $d(D'_l) = d(D_n) = d(D_1) = d(D'_1) = 4$. Пусть $\varphi(\partial D'_l \cap \partial D'_1) = a^k$,$\varphi(\partial D'_1 \cap \partial D_1) = b^m$,$\varphi(\partial D_n \cap \partial D_1) = c^t$,$\varphi(\partial D_n \cap \partial D'_l) = d^r$, $k, m, t, r \in Z \backslash \{0\}$. Тогда данному фрагменту диаграммы соответствует петля в дереве-графе, что невозможно.

1. Если для всех областей $D_j, j = \overline{1,n}$ выполняется условие $\|\varphi(\partial D_j)\| = 2m_{ab}$, и, учитывая, что $\varphi(\partial D_1), \varphi(\partial D_{r+1}) \in G_{ab}$, то метка пути $\varphi(OO_1) = \varphi(e_1)$ совпадает с меткой $\varphi(e_2)$ (лемма 2). Выделяем диаграмму сопряженности слов w' и v', которую вырезаем, и замыкаем в кольцо оставшуюся часть. Этот процесс продолжится до тех пор, пока не получим $k \leq 3$.

2. Рассмотрим случай $\|\varphi(\partial D_j)\| > 2m_{ab}, j = \overline{1,n}$.

Пусть $\varphi(\partial D_1), \varphi(\partial D_1') \in G_{ab}$,$m_{ab} \geq 2$,$\varphi(\partial D_1 \cap \gamma) = s$,$\varphi(\partial D_1 \cap \delta) = r$,$\varphi(\partial D_n \cap \partial D_1) = b^p$,$\varphi(\partial D_l' \cap \partial D_1') = b^q$,$\varphi(\partial D_1 \cap \partial D_2) = a^h$,$\varphi(\partial D_1' \cap \partial D_2') = a^t$.

Для области D_1 имеем $sb^pra^h = 1$, для D_1' имеем $sb^qra^t = 1$. Учитывая $a^hsb^pr = 1$, то $r = b^{-p}s^{-1}a^{-h}$. Получаем $sb^{q-p}s^{-1} = a^{h-t}$, $r^{-1}b^{q-p}r = a^{h-t}$.

Если $q = p, h \neq t$, то, учитывая равенство $sb^{q-p}s^{-1} = a^{h-t}$, получим $a^{h-t} = 1$- противоречие теореме 6. Аналогично невозможен случай, когда $h = t, q \neq p$.

Если $q = p, h = t$, то можно выделить поддиаграмму сопряженности слов w' и v', которую вырезаем, а оставшуюся часть замыкаем в кольцо; через конечное число шагов получаем $k \leq 3$.

Рассмотрим кольцевую диаграмму сопряженности, соответствующую равенству $sb^{q-p}s^{-1} = a^{h-t}$, где $h - t = m$.

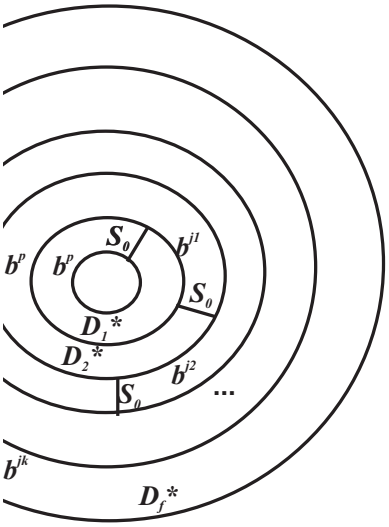

Рис.4 $S - i$ *области*

а) Если $b = a$, тогда $sb^ms^{-1} = b^m$.

Пусть $m_{ab} = 2k$. Рассмотрим определяющее соотношение для данного m_{ab} : $\underbrace{ab...ab}_{2k} = \underbrace{ba...ba}_{2k}$, отсюда $\underbrace{ab...a}_{s_0} b^p \underbrace{a^{-1}b^{-1}...a^{-1}}_{s_0^{-1}} = b^p$.

Построим диаграмму сопряженности для b^m и b^m , состоящую из f вложенных S-i областей с граничными циклами $\tau_i, i = \overline{1, f+1}$ (рис.4). Каждую S-i область обозначим через D_j^* , $\|\varphi(\partial D_j^*)\| = 2m_{ab}$, а через e_j - ребро, соответствующее данной области, $j = \overline{1,f}$. Имеем $\varphi(\tau_1) = b^p, \varphi(\tau_{f+1}) = b^h$, все D_j^*

имеют четное m_{ab} , а $\varphi(e_j) = s_0$, где s_0 - подслово определяющего соотношения. Получаем $\forall i\ \varphi(\tau_i) = b^p$. Таким образом, $p = h$ и $\varphi(\partial D_1 \cap \partial D_2) = b^p$. В общем случае имеем $\varphi(\partial D_1 \cap \gamma) = s = s_0 b^{j_1} s_0 b^{j_2} ... b^{j_{f-1}} s_0$, учитывая $s_0 b^p = b^p s_0$ в G_{ab}, получаем $s = s_0^f b^{j_1+j_2+...+j_{f-1}}$. Пусть s имеет наименьшую длину, тогда $\omega(e_j) = \alpha(e_{j+1}), \forall j = \overline{1,f}$ и $s = s_0^f$.

Таким образом, мы представили область D_1, являющуюся картой в G_{ab}, как объединение областей $D_1 = \cup D_j^*, j = \overline{1,f}$, где $\|\varphi(\partial D_j^*)\| = 2m_{ab}$ и все D_j^* являются областями первого типа (Рис. 5).

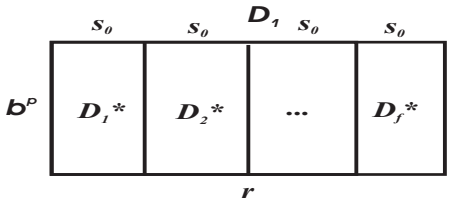

Рис.5 *Представление области* D_1

Рассмотрим поддиаграмму $D_1 D_2 ... D_r$. Пусть область D_1 состоит из ряда областей $D_j^*, j = \overline{1,k}$, где $\|\varphi(\partial D_j^*)\| = 2m_{ab}$, получим, согласно лемме 2, что метки общих ребер областей совпадают $\varphi(\partial D_{j-1}^* \cap \partial D_j^*) = \varphi(\partial D_j^* \cap \partial D_{j+1}^*) = b^p$. Все области $D_i, i = \overline{1,n}$ являются областями первого типа, и, если ребро с меткой $\varphi(\partial D_n \cap \partial D_1)$ содержит степень образующего, то такую же степень будет содержать каждое ребро $\varphi(\partial D_{i-1} \cap \partial D_i), i = \overline{1,n}$. Таким образом, $\varphi(\partial D_n \cap \partial D_1) = \varphi(\partial D_l' \cap \partial D_1') = \varphi(\partial D_r \cap \partial D_{r+1})$.

Таким образом, $w' = z'^{-1} v' z'$, выделяем поддиаграмму сопряженности слов w' и v', которую вырезаем, а оставшуюся часть замыкаем в кольцо, через конечное число шагов вновь получаем $k \leq 3$.

Пусть $m_{ab} = 2k+1$. Рассмотрим определяющее соотношение для данного m_{ab}: $\underbrace{ab...aba}_{2k+1} = \underbrace{ba...bab}_{2k+1}$, отсюда $\underbrace{ba...ba}_{z_1} b^p \underbrace{b^{-1}a^{-1}...b^{-1}a^{-1}}_{z_1^{-1}} = a^p$

и $\underbrace{ab...ab}_{z_2} a^p \underbrace{a^{-1}b^{-1}...a^{-1}b^{-1}}_{z_2^{-1}} = b^p$.

Так как m_{ab} - нечетное, то чтобы b^m перевести в b^m , потребуется два (или четное число) сопряжений словами z_1, z_2. Вновь построим диаграмму сопряженности для b^m и b^m , состоящую из f вложенных S-i областей с граничными циклами $\tau_i, i = \overline{1, f+1}$. Каждую S-i область обозначим через D_j^* , $\|\varphi(\partial D_j^*)\| = 2m_{ab}$. Имеем $\varphi(\tau_1) = b^p, \varphi(\tau_{f+1}) = a^h$, и все D_j^* имеют нечетное m_{ab}. В этом случае получаем, если $\varphi(\tau_j) = b^p$, то $\varphi(\tau_{j+1}) = a^p$, $\varphi(e_j) = z_2$ и $\varphi(e_{j+1}) = z_1$. Тогда $p = h$,$s = z_2 z_1 ... z_1$, $\varphi(\partial D_1 \cap \partial D_2) = a^p$.

Рассмотрим поддиаграмму $D_1 D_2 ... D_r$. Пусть область D_1 состоит из ряда областей $D_j^*, j = \overline{1,k}$, где $\|\varphi(\partial D_j^*)\| = 2m_{ab}$, получим, согласно лемме 2, что метки общих ребер областей $\varphi(\partial D_{j-1}^* \cap \partial D_j^*)$ и $\varphi(\partial D_j^* \cap \partial D_{j+1}^*)$ есть степени b^p или a^p. Все области $D_i, i = \overline{1,n}$ являются областями первого типа, и, если ребро с

меткой $\varphi(\partial D_n \cap \partial D_1)$ содержит степень образующего, то такую же степень будет содержать каждое ребро $\varphi(\partial D_{i-1} \cap \partial D_i), i = \overline{1,n}$. Таким образом, $\varphi(\partial D_n \cap \partial D_1) = \varphi(\partial D'_l \cap \partial D'_1) = \varphi(\partial D_r \cap \partial D_{r+1})$.

Таким образом, $w' = z'^{-1} v' z'$, выделяем поддиаграмму сопряженности слов w' и v', которую вырезаем, а оставшуюся часть замыкаем в кольцо, в результате через конечное число шагов получаем $k \leq 3$.

б) Если $b \neq a$, тогда $s^{-1} b^m s = a^m$. Строим диаграмму сопряженности для b^m и a^m аналогичным образом, как и в предыдущем случае. Мы представили область D_1 в виде $D_1 = \cup D^*_j, j = \overline{1,k}$, где $\|\varphi(\partial D^*_j)\| = 2m_{ab}$ и все D^*_j являются областями первого типа, $\varphi(\partial D^*_j \cap \partial D^*_{j+1}) = a^p$ или $\varphi(\partial D^*_j \cap \partial D^*_{j+1}) = b^p$. Получим $s = z_2 z_1 z_2 ... z_2$, и $\varphi(\partial D_1 \cap \partial D_2) = a^p$.

Таким образом, $\varphi(\partial D_n \cap \partial D_1) = b^p$, и, учитывая, что область D_1 состоит из ряда областей $D^*_j, j = \overline{1,k}$, где $\|\varphi(\partial D^*_j)\| = 2m_{ab}$, получим, согласно лемме 2, что метки общих ребер областей есть степени b^p или a^p . Так как все области $D_i, i = \overline{1,n}$ являются областями первого типа, и, если ребро с меткой $\varphi(\partial D_n \cap \partial D_1)$ содержит степень образующего, то такую же степень будет содержать каждое ребро $\varphi(\partial D_{i-1} \cap \partial D_i), i = \overline{1,n}$. В итоге, $\varphi(\partial D_n \cap \partial D_1) = \varphi(\partial D'_l \cap \partial D'_1) = \varphi(\partial D_r \cap \partial D_{r+1})$.

Вырезаем поддиаграмму сопряженности слов w' и v', оставшуюся часть замыкаем в кольцо, и через конечное число шагов получаем $k \leq 3$.

II. Пусть диаграмма M' содержит области первого, второго и третьего типа, $\partial M' = \gamma \cup \delta$, $\varphi(\gamma) = (w')^k$,$\varphi(\delta) = (v')^k$. Диаграмма должна содержать одинаковое количество областей второго и третьего типа, причем области второго должны чередоваться с областями третьего типа, так как в противном случае в диаграмме M' выделится полоса. Приклеим к ней диаграмму M'' , тождественную диаграмме M', с циклическим сдвигом на слово w'.

Обозначим $\varphi(\gamma) = (w')^k, \varphi(\gamma_i) = w'$, причем $\alpha(\partial D_1 \cap \gamma_1) = O, \omega(\gamma_1) = O'$, $\varphi(\gamma_1) = \varphi(OO') = w'$.

Степень внутренней точки $O' \geq 4$, так как в противном случае она является особой внутренней точкой диаграммы. Пусть $d(O') = 4$.

1. Пусть D_1, D_{r+1} и соответственно D'_1 - области третьего типа, при этом $\|\varphi(\partial D_1 \cap \gamma)\| = \|\varphi(\partial D_{r+1} \cap \gamma)\| = \|\varphi(\partial D'_1 \cap \gamma)\|$, $d(D_1) = d(D'_1)$. Тогда $\|\varphi(\partial D_1 \cap \partial D'_1)\| \geq 2$, откуда $\varphi(\partial D'_1), \varphi(\partial D_1) \in G_{ab}$.

Пусть $\varphi(\partial D_1), \varphi(\partial D'_1) \in G_{ab}$, $m_{ab} \geq 2$, $\varphi(\partial D_1 \cap \gamma) = s$, $\varphi(\partial D_1 \cap \delta) = r$, $\varphi(\partial D_n \cap \partial D_1) = b^p$, $\varphi(\partial D'_l \cap \partial D'_1) = b^q$, $\varphi(\partial D_1 \cap \partial D_2) = a^h$, $\varphi(\partial D'_1 \cap \partial D'_2) = a^t$, $\|r\| < \|s\|$. Тогда, проводя аналогичные рассуждения, что и в 1 случае, получим $s b^m s^{-1} = a^m$, где $q - p = h - t = m$. Строим, как и в 1 случае, диаграмму сопряженности для b^m и a^m .

а) Если для области D_1 выполняется условие $\|\varphi(\partial D_1)\| = 2m_{ab}$, тогда и $\|\varphi(\partial D'_1)\| = 2m_{ab}$, $\varphi(\partial D_1 \cap \partial D'_1)$ содержит либо b^p (если $m_{ab} = 2k, k > 1$), либо содержит a^p (если $m_{ab} = 2k+1$). Учитывая, $d(D_1) = d(D'_1)$ и лемму 2, получаем $\varphi(\partial D'_l \cap \partial D'_1) = b^p$, следовательно, и $\varphi(\partial D_r \cap \partial D_{r+1}) = b^p$. Таким образом, метка пути $\varphi(OO_1) = \varphi(\partial D_n \cap \partial D_1)$ совпадает с меткой $\varphi(\partial D_r \cap \partial D_{r+1})$. При $m_{ab} = 2$

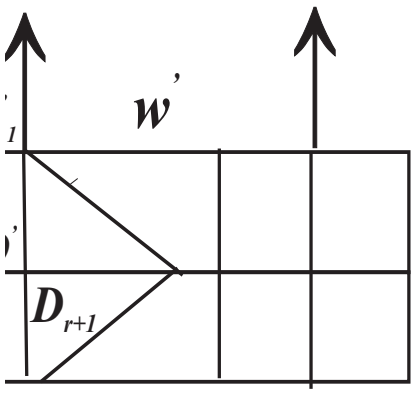

Рис.6 *Случай 2.*

получаем аналогичный случай. Выделяем поддиаграмму сопряженности слов w' и v', которую вырезаем, а оставшуюся часть замыкаем в кольцо, процесс продолжаем до тех пор, пока не получим $k \leq 3$.

б) Пусть для области D_1 выполняется условие $\|\varphi(\partial D_1)\| > 2m_{ab}$.

Если $m_{ab} = 2k, k > 1$, то строя диаграмму сопряженности как и для 1 случая, получаем представление области D_1 в виде $D_1 = \cup D_j^*, j = \overline{1, f}$, где $\|\varphi(\partial D_j^*)\| = 2m_{ab}$. Но, учитывая $\|r\| < \|s\|$, в результате имеем, что среди областей первого типа D_j^* есть хотя бы одна область D_f^* третьего типа (Рис. 7). В итоге $\forall D_j^*, j = \overline{1, f-1}$ имеет место $\|\varphi(\partial D_j^*)\| = 2\|s_0\| + 2$, и $\|\varphi(\partial D_f^*)\| = \|s_0\| + 2$,$s = s_0^f, r = s_0^{f-1}$. Такой случай возможен только если область D_f^* имеет $m_{ab} = 2$. Но тогда $s_0 = a^x b^y$, и, учитывая, что s_0 является подсловом определяющего соотношения каждой области $D_j^*, j = \overline{1, f-1}$, приходим к заключению, что данный случай невозможен.

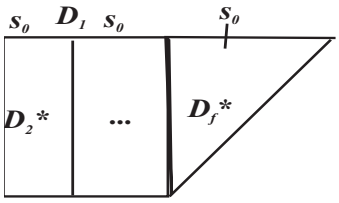

Рис.7 *Представление области*

При $m_{ab} = 2k + 1$ получаем аналогичный случай.

2. Пусть D_1 и D_i - области различных типов (например, области D_1 - третьего, D_i - первого или второго типа). Данная ситуация также невозможна. Так как получили внутреннюю особую точку $O = \alpha(\partial D_1 \cap \gamma)$.

Рассмотрим теперь, когда связная, приведенная кольцевая R - диаграмма M сопряженности слов $(w')^k, (v')^k$ имеет вид (Рис. 2б). И пусть $\varphi(\gamma) = (w')^m$ и

$\varphi(\delta) = (v')^n$. Выделим в диаграмме M поддиаграмму M' вида (Рис.8). Число таких поддиаграмм ограничено $|w'| \cdot |v'|$. Действительно, если осуществить разрез в точке A , то слово w' будет разбито на две части $w' = w'_1 w'_2$. При этом, может быть только $|w'|$ возможности разбить слово w' на две части. Аналогично для слова v'. Таким образом, если диаграмма имеет больше чем $|w'| \cdot |v'|$ подкарт вида (Рис.8), то выделится повторяющаяся часть диаграммы, которую можно вырезать, а оставшуюся часть снова замкнуть в кольцо, при этом получившаяся диаграмма будет содержать не больше $|w'| \cdot |v'|$ поддиаграмм вида рис 8.

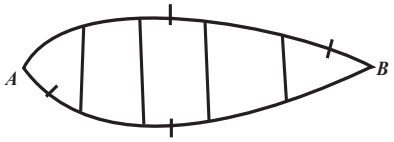

Рис.8 *Структура поддиаграммы*

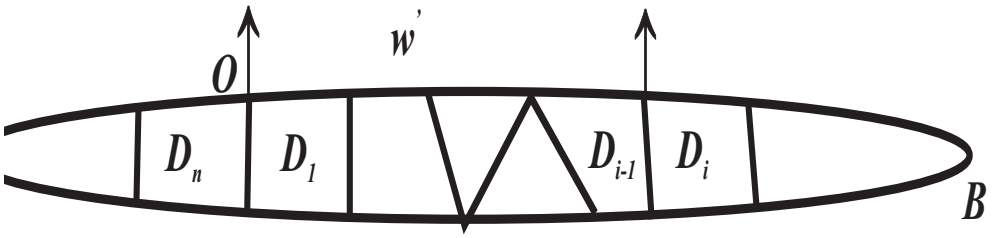

Рис.9 *Структура поддиаграммы*

Обозначим внешний путь AB через γ_1 , внутренний путь AB через δ_1(Рис.9). Заметим, что слоговые длины путей γ_1 и δ_1 должны совпадать, иначе диаграмма M будет содержать полосу, что невозможно в виду ее $\overline{R}$- приведенности.

Предположим, что $|\gamma_1|$ - достаточно большое число. Пусть $|\gamma_1| > 4\|w'\|$. Выделим на пути γ_1, начиная от вершины A , некоторую циклическую перестановку $(w')^*$ слова w' такую, что слово $(w')^*$ начинается в вершине O, имеющей в диаграмме M' степень 3. Дальнейшие рассуждения проводятся аналогично как и для диаграмм вида рис.2а. Таким образом, можно показать, что $k \leq 3$.

Если $|\gamma_1| < 4\|w'\|$, число поддиаграмм вида рис. 8 не превышает $|w'| \cdot |v'|$, длина каждого простого пути (простой путь - это путь в диаграмме вида рис. 2б, соединяющий 2 поддиграммы (диски)) не превышает $|w'|$, количество простых путей не превышает $|w'| \cdot |v'|$. Тогда $m \cdot |w'| < 4|w'|(|w'| \cdot |v'|) + |w'|(|w'| \cdot |v'|) = 5|w'|(|w'| \cdot |v'|)$, откуда $m, n < 5(|w'| \cdot |v'|)$.

Если $|z| = 0$. В этом случае будем рассматривать связную односвязную приведенную диаграмму M с граничным циклом $\partial M = \gamma \cup \delta$, $\varphi(\gamma) = (w')^k$, $\varphi(\delta) = (v')^k$. Предположим, что $k > 1$, тогда преобразуем диаграмму, подклеив к ней по границе γ тождественную ей диаграмму с циклическим сдвигом на слово w'. Проводя дальнейшие рассуждения аналогично случаю 1, получим,

что k можно уменьшить, следовательно, $k \leq 3$, и числа m, n ограничены сверху $5(|w'| \cdot |v'|)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Appel K., Schupp P. Artin groups and infinite Coxeter groups // Invenf. Math. V. 72. 1983. P. 201-220.

[2] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. Москва: Мир,1980. 447 с.

[3] Безверхний В.Н. Решение обобщенной сопряженности слов в группах Артина большого типа // Фундаментальная и прикладная математика.Т.5,№1 -Москва: МГУ,1999.С.1-38.

[4] Безверхний В.Н., Карпова О.Ю. Проблемы равенства и сопряженности слов в группах Артина с древесной структурой // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика -Тула: ТулГУ, 2006. - Том 12.-Вып.1.-С.67-82.

[5] Безверхний В.Н., Карпова О.Ю. О кручении в группах Артина с древесной структурой // Известия ТулГУ. Естественные науки. -Тула: ТулГУ, 2008. - Том 1.-Вып.2.-С.6-17.

[6] Безверхний В.Н., Карпова О.Ю. Проблема вхождения в циклическую подгруппу в группах Артина с древесной структурой. // Чебышевский сборник.-Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н. Толстого, 2008. - Том 9.-Вып.1(25).-С.30-50.

[7] Безверхний В.Н., Карпова О.Ю. Решение проблемы степенной сопряженности в группах Артина с древесной структурой // Известия ТулГу. Естественные науки. - Тула: ТулГу, 2008. Вып.3.- С.42-59.

Новомосковский филиал НИРХТУ им. Д.И. Менделеева.

Problem of crossing of cyclic subgroups in Artin groups with arboreal structure.

O.U. Platonova.

In this paper we have proved that an Artin group with arboreal structure has solvable the problem of crossing of cyclic subgroups.

Kewwords:.Artin group with arboreal structure, diagram area.

Platonova Oksana (roksana2003@rambler.ru), senior teacher, department of higher mathematics, A Novomoskovskiy branch of Russian Khimiko and technological university by Mendeleev D.I.